

電気のための微分積分 B 第5回解答

以下, 積分定数 C は省略する.

5.1. (0) [準備]: $\int e^{-x} dx$ を計算する。

$$-x = t$$

とおく。両辺を x で微分して

$$-1 = dt/dx$$

両辺に -1 をかけて

$$dx = -dt$$

したがって

$$\int e^{-x} dx = \int e^t (-dt) = - \int e^t dt = -e^t = -e^{-x}$$

$$(1) \int x e^{-x} dx$$

$f'(x) = e^{-x}$, $g(x) = x$ とみて部分積分法

$$\int f'(x) g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

を使う。

まず $f'(x) = e^{-x}$ であることから (0) より

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int e^{-x} dx = -e^{-x}$$

となる。次に部分積分法を使って

$$\begin{aligned} \int x e^{-x} dx &= (-e^{-x}) x - \int (-e^{-x}) (x)' dx \\ &= -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x}. \end{aligned}$$

短く言うと

$$\begin{aligned} \int x e^{-x} dx &= \int x (-e^{-x})' dx = x (-e^{-x}) - \int (x)' (-e^{-x}) dx \\ &= -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x}. \end{aligned}$$

としてもよい.

$$\begin{aligned}(2) \quad \int x^2 e^{-x} dx &= \int x^2 (-e^{-x})' dx = x^2 (-e^{-x}) - \int (x^2)' (-e^{-x}) dx \\&= x^2 (-e^{-x}) - \int 2x (-e^{-x}) dx \\&= x^2 (-e^{-x}) + 2 \int x e^{-x} dx\end{aligned}$$

ここで (1) を使って

$$\begin{aligned}&= x^2 (-e^{-x}) + 2(-xe^{-x} - e^{-x}) \\&= (-x^2 - 2x - 2)(e^{-x}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(3) \quad \int x \sin x dx \\ \int \sin x dx = -\cos x\end{aligned}$$

だから

$$(-\cos x)' = \sin x$$

であることがわかる. 次に部分積分法を使って

$$\begin{aligned}\int x \sin x dx &= \int x (-\cos x)' dx \\&= x (-\cos x) - \int (x)' (-\cos x) dx \\&= -x \cos x + \sin x.\end{aligned}$$

5.2. $S = \int e^x \sin x dx$, $C = \int e^x \cos x dx$ とおく。

(1) 部分積分により S を C で表せ。

$$\begin{aligned}S &= \int e^x \sin x dx = \int e^x (-\cos x)' dx \\&= e^x (-\cos x) - \int (e^x)' (-\cos x) dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \\&= -e^x \cos x + C.\end{aligned}$$

(2) 部分積分により C を S で表せ。

$$\begin{aligned} C &= \int e^x \cos x \, dx = \int e^x (\sin x)' \, dx \\ &= e^x (\sin x) - \int (e^x)' (\sin x) \, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx \\ &= e^x \sin x - S. \end{aligned}$$

(3) S, C を x で表せ。

$$\begin{cases} S = -e^x \cos x + C, \\ C = e^x \sin x - S, \end{cases}$$

を解いて

$$S = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x), \quad C = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x).$$

5.3. (1) a を正の定数とする. $x = a \tan t$ によって積分変数を t に変換することにより $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$ を計算せよ. (Hint. $\frac{1}{1 + \tan^2 t} = \cos^2 t$.)

$x = a \tan t$ の両辺を t で微分して

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a}{\cos^2 t}$$

$$\begin{aligned} 1 + \tan^2 t &= \frac{1}{\cos^2 t} \quad (\text{三平方の定理}) \text{ に注意して} \\ &= a(1 + \tan^2 t). \end{aligned}$$

この両辺に dt をかけると

$$dx = a(1 + \tan^2 t)dt.$$

従って x を $a \tan t$ で置き換えると dx を $a(1 + \tan^2 t) dt$ で置き換えなくてはならないので

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \int \frac{a(1 + \tan^2 t) dt}{a^2(1 + \tan^2 t)} = \int \frac{dt}{a} = \frac{t}{a}$$

ここで逆三角関数を使うと $\frac{x}{a} = \tan t \Leftrightarrow t = \tan^{-1} \frac{x}{a}$ だから

$$= \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a}.$$

(2) $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} \right)$ を計算せよ.

$\frac{x}{a} = t$ において合成関数の微分法を使うと

$$\frac{d}{dx} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) = \frac{dt}{dx} \times \frac{d}{dt} \tan^{-1} t = \frac{1}{a} \times \frac{d}{dt} \tan^{-1} t \cdots (\star)$$

$y = \tan^{-1} t$ とおくと逆三角関数の定義により

$$y = \tan^{-1} t \Leftrightarrow t = \tan y, \quad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \right)$$

だから

$$\frac{dt}{dy} = \frac{d}{dy} \tan y = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + t^2$$

逆関数の微分法により

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dy}} = \frac{1}{1 + t^2}$$

だから

$$\frac{d}{dt} \tan^{-1} t = \frac{1}{1 + t^2}$$

($\star$) と合わせて

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) = \frac{1}{a^2} \times \frac{1}{1 + t^2} = \frac{1}{a^2} \times \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{a} \right)^2} = \frac{1}{a^2 + x^2}$$

5.4. (1) 次の式を部分分数に分解せよ.

$$\frac{x + 8}{x^2 + x - 6}$$

分母を因数分解すると

$$x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$$

だからこの関数は

$$\frac{x + 8}{x^2 + x - 6} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 3} \quad (A, B \text{ は定数})$$

の形に変形される. これを部分分数分解という. この等式が x の恒等式になるように定数 A, B の値を決めよう. 右辺を通分して足し算すると

$$\begin{aligned}\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} &= \frac{A(x+3)}{(x-2)(x+3)} + \frac{B(x-2)}{(x-2)(x+3)} = \frac{A(x+3) + B(x-2)}{(x-2)(x+3)} \\ &= \frac{(A+B)x + 3A - 2B}{(x-2)(x+3)}\end{aligned}$$

だから分子どうし比較して

$$x + 8 = (A + B)x + 3A - 2B$$

であればよい.

$$x \text{ の係数どうしを比較して } A + B = 1$$

$$\text{定数項どうし比較して } 3A - 2B = 8$$

この連立方程式を解くと $A = 2$, $B = -1$ だから

$$\frac{x+8}{x^2+x-6} = \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x+3}$$

$$(2) \int \frac{x+8}{x^2+x-6} dx \text{ を計算せよ.}$$

(1) により

$$\begin{aligned}\int \frac{x+8}{x^2+x-6} dx &= \int \frac{2}{x-2} dx - \int \frac{1}{x+3} dx \\ &= 2 \log |x-2| - \log |x+3|\end{aligned}$$