電気のための微分積分B 第4回解答

以下, 積分定数 C は省略する.

3.1.

(1) $\displaystyle\int (2x-3)^5\,dx$

$$2x-3=t \qquad (*)$$

とおき, この両辺を x で微分すると

$$2=\frac{dt}{dx}$$

となるが, この両辺に $\dfrac{dx}{2}$ を掛けると

$$dx=\frac{dt}{2} \qquad (**)$$

という等式が得られる. この $(**)$ から dx を $\dfrac{1}{2}\,dt$ に置き換えればよいことが分かる. このおきかえにより

$$\int (2x-3)^5\,dx=\int t^5\left(\frac{1}{2}dt\right)=\frac{1}{2}\int t^5\,dt=\frac{1}{12}\,t^6$$

$t=2x-3$ だから

$$=\frac{1}{12}(2x-3)^6.$$

[検算] $2x-3=t$ と置いて合成関数の微分法により

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{12}(2x-3)^6\right)=\frac{dt}{dx}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{12}t^6\right)=2\frac{1}{12}6t^5=t^5=(2x-3)^5$$

となるから正しい。

(2) $\displaystyle\int \cos(2x-3)\,dx$

(1) と同じ変換で

$$2x-3=t \qquad (*)$$

とおき,x で微分すると

$$2=\frac{dt}{dx}$$

となるが, 両辺に $\dfrac{dx}{2}$ を掛けると

$$dx = \frac{dt}{2} \qquad (**)$$

という等式が得られる．これらにより $2x-3$, dx をおきかえると,

$$\int \cos(2x-3)\,dx = \int \cos t \left(\frac{1}{2}dt\right) = \frac{1}{2}\sin t$$

$t = 2x-3$ だから

$$= \frac{1}{2}\sin(2x-3)$$

[検算] $2x-3=t$ と置いて合成関数の微分法により答を微分すると

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{2}\sin(2x-3)\right) = \dfrac{dt}{dx}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}\sin t\right) = 2\cdot\dfrac{1}{2}\cos t = \cos t = \cos(2x-3)$

となるから正しい。

(3) $\displaystyle\int e^{2x-3}\,dx$

(1) と同じ変換で $2x-3$, dx をおきかえると,

$$\int e^{2x-3}\,dx = \int e^t \left(\frac{1}{2}dt\right) = \frac{1}{2}e^t$$

$t = 2x-3$ だから

$$= \frac{1}{2}e^{2x-3}$$

[検算] $2x-3=t$ と置いて合成関数の微分法により答を微分すると

$\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{2}e^{2x-3}\right) = \dfrac{dt}{dx}\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{2}e^t\right) = 2\cdot\dfrac{1}{2}e^t = e^t = e^{2x-3}$

となるから正しい。

4.2. (1) $\displaystyle\int \sqrt{x}\,dx$

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ である．べき関数の積分法 $\displaystyle\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ において $\alpha = \dfrac{1}{2}$ とすると

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$$

(2) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$

$x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ である．べき関数の積分法 $\displaystyle\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ において $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ とすると

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{1}{2}}$$
$$= 2\sqrt{x}$$

(3) $\displaystyle\int \sqrt{2x-3}\,dx$ を計算しよう．$2x-3=t$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=2$ だから $dx = \dfrac{1}{2}dt$. したがって 置換積分法を使って

$$\int \sqrt{2x-3}\,dx = \int \sqrt{t}\frac{1}{2}\,dt$$

(1) により

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(2x-3)^{\frac{3}{2}}$$

(4) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{2x-3}}\,dx$ を計算しよう．$2x-3=t$ とおくと $\dfrac{dt}{dx}=2$ だから $dx = \dfrac{1}{2}dt$. したがって 置換積分法を使って

$$\int \frac{1}{\sqrt{2x-3}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\frac{1}{2}\,dt$$

(2) により

$$= \frac{1}{2}\cdot 2t^{\frac{1}{2}} = t^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2x-3}$$

4.3. (1) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}\,dx$ を計算せよ．($x^2+1=t$ とおく)

$t = x^2+1$ とおき, この両辺を x で微分すると

$$2x = \frac{dt}{dx}$$

となるが, この両辺に $\dfrac{dx}{2x}$ を掛けると

$$dx = \frac{dt}{2x}$$

という等式が得られる．このことから dx を $\frac{1}{2x}\,dt$ に置き換えればよいことになる．（これは定理 6.3 (6.8) の置き換えと全く同じ置き換えである．）

この置き換えにより

$\displaystyle\int x\sqrt{x^2+1}dx = \int x\sqrt{t}\left(\frac{1}{2x}dt\right) = \int \sqrt{t}\left(\frac{1}{2}dt\right) = \frac{1}{2}\,\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}}.$

(2) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ を計算せよ．($x^2+1=t$ とおく)

(1) と同じ置き換えにより

$\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{t}}\left(\frac{1}{2x}dt\right) = \int \frac{1}{\sqrt{t}}\left(\frac{1}{2}dt\right) = \frac{1}{2}\,2t^{\frac{1}{2}} = (x^2+1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2+1}.$

4.3. (1) a を正の定数とする．$x = a\tan t$ によって積分変数を t に変換することにより $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2}$ を計算せよ．(Hint. 三平方の定理により $\displaystyle\frac{1}{1+\tan^2 t} = \cos^2 t$．)

$x = a\tan t$ の両辺を t で微分して

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a}{\cos^2 t}$$

Hint により

$$= a(1+\tan^2 t).$$

この両辺に dt をかけると

$$dx = a(1+\tan^2 t)dt.$$

従って x を $a\tan t$ で置き換えると dx を $a(1+\tan^2 t)\,dt$ で置き換えなくてはならないので

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{a(1+\tan^2 t)\,dt}{a^2(1+\tan^2 t)} = \int \frac{dt}{a} = \frac{t}{a} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}.$$

(2) $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{x}{a}\right)$ を計算せよ.

$(\tan^{-1}x)' = \dfrac{1}{x^2+1}$ である。(あとでやります) $\dfrac{x}{a} = t$ とおいて合成関数の微分法を使うと

$$\frac{d}{dx}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{dt}{dx}\frac{d}{dt}\tan^{-1}t = \frac{1}{a}\frac{1}{1+t^2} = \frac{a}{a^2+x^2}.$$

この事からも (1) が分かる.