電気のための微分積分 B 第 3 回問題　解答

3.1.　(1) $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であるというのは

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

となる事である．ただし $\frac{d}{dx}F(x)$ は $F'(x)$ と同じで $F(x)$ の導関数を表す記号である．

(2) $f(x)$ の不定積分とは

$$F(x) + C$$

のことである．ただし, $F(x)$ は $f(x)$ の原始関数であり, C は任意の定数である．この定数 C を**積分定数**という．

$f(x)$ の不定積分を記号

$$\int f(x)dx$$

で表す．したがって

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \iff \frac{d}{dx}F(x) = f(x)$$

である．しばらく積分定数は省略してもよいことにする．

3.2.　(1) C を定数とするとき

$$\frac{d}{dx}(C) = 0$$

だから

$$\int 0\,dx = C$$

(2) $\frac{d}{dx}2x = 2$

だから

$$\int 2\,dx = 2x + C$$

(3) $\dfrac{d}{dx}x^2 = 2x$

だから両辺を 2 で割って

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(x^2\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x^2\right) = x$$

だから

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$$

(4) $\dfrac{d}{dx}x^3 = 3x^2$

だから 両辺を 3 で割って

$$\frac{1}{3}\frac{d}{dx}\left(x^3\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}x^3\right) = x^2$$

だから

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + C$$

(5) a を 0 でない定数とするとき,

$$\frac{d}{dx}x^a = ax^{a-1}$$

だから 両辺を a で割って

$$\frac{1}{a}\frac{d}{dx}\left(x^a\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{a}x^a\right) = x^{a-1}$$

ここで $a-1=\alpha$ とおくと $a=\alpha+1$ となるから.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right) = x^{\alpha}$$

だから $\alpha \neq 1$ のとき

$$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

(6) $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$

だから

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

である．これを

$$\int \cos x\, dx = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + C$$

と考えてもよい．

(7) $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$

だから

$$\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$$

だから

$$\int \sin x\, dx = -\cos x$$

である．これを

$$\int \sin\ dx = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + C$$

と考えてもよい．

(8) $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ である．$\alpha = \dfrac{1}{2}$ として (5) を用いると

$$\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

(9) $x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ である．$\alpha = -\dfrac{1}{2}$ として (5) を用いると

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2x^{\frac{1}{2}} + C$$
$$= 2\sqrt{x} + C$$

(10) $\dfrac{1}{x} = x^{-1}$ であるが (5) は使えない．

$$\frac{d}{dx}\log|x| = \frac{1}{x}$$

だから不定積分の定義により

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \log|x| + C.$$

(11) $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$

だから不定積分の定義により

$$\int e^x\,dx = e^x + C.$$

3.3. 積分定数 C は省略する.

(1) $\displaystyle\int (x^2+3x)\,dx = \int x^2\,dx + \int 3x\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}.$

(2) $\displaystyle\int (8x^3 - 2\cos x)\,dx = 8\int x^3\,dx - 2\int \cos x\,dx = 2x^4 - 2\sin x.$

(3) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x}\,dx = \int \left(1+\frac{1}{x}\right)\,dx = x + \log|x|.$

(4) $\displaystyle\int \left(\sqrt{x^3} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\,dx = \int (x^{\frac{3}{2}} + x^{-\frac{1}{2}})\,dx = \frac{1}{1+\frac{3}{2}}x^{1+\frac{3}{2}} + \frac{1}{1-\frac{1}{2}}x^{1-\frac{1}{2}}$

$\displaystyle\quad = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + 2\,x^{\frac{1}{2}}.$

(5) $\displaystyle\int (9x^2 + 2e^x)dx = 9\int x^2\,dx + 2\int e^x\,dx = 3x^3 + 2e^x.$

(6) $\displaystyle\int (\sin x - \cos x)\,dx = -\cos x - \sin x$