電気のための微分積分B
第2回 解答

2.1 (1) $f^{(n)}(x) = e^x$ だから $f^{(n)}(0) = e^0 = 1 \cdots (\star)$, $(n = 1, 2, \cdots)$

(2) 関数 $f(x)$ の n 次のマクローリン近似多項式 $P(x)$ は

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

であるが, $(\star)$ を代入して

$$P(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

2.2 (1)$f(x) = \cos x$ とするときの 8 次のマクローリン近似多項式 $P_8(x)$ を計算せよ.

$f^{(n)}(0) = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, $n = 0, 1, 2, \cdots$

だから,

$f'(0) = \cos\frac{\pi}{2} = 0,$

$f''(0) = \cos\frac{2\pi}{2} = -1,$

$f^{(3)}(0) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0,$

$f^{(4)}(0) = \cos\frac{4\pi}{2} = 1,$

$f^{(5)}(0) = \cos\frac{5\pi}{2} = 0,$

$f^{(6)}(0) = \cos\frac{6\pi}{2} = -1,$

$f^{(7)}(0) = \cos\frac{7\pi}{2} = 0,$

$f^{(8)}(0) = \cos\frac{8\pi}{2} = 1,$

したがって

$$\begin{aligned} P(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(8)}(0)}{(8)!}x^8 \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} \end{aligned}$$

(2) $f(x) = \sin x$ とするとき 9 次のマクローリン近似多項式 $P(x)$ を計算せよ.

$f^{(n)}(0) = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right),\ n = 0, 1, 2, \cdots$

だから

$f'(0) = \sin\frac{\pi}{2} = 1,$

$f''(0) = \sin\frac{2\pi}{2} = 0,$

$f^{(3)}(0) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1,$

$f^{(4)}(0) = \sin\frac{4\pi}{2} = 0,$

$f^{(5)}(0) = \sin\frac{5\pi}{2} = 1,$

$f^{(6)}(0) = \sin\frac{6\pi}{2} = 0,$

$f^{(7)}(0) = \sin\frac{7\pi}{2} = -1,$

$f^{(8)}(0) = \sin\frac{8\pi}{2} = 0,$

$f^{(9)}(0) = \sin\frac{9\pi}{2} = 1,$

したがって

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(9)}(0)}{9!}x^9$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$

2.3 訂正 Taylor の定理を利用して次の事を確かめよ.

(1) $\lim_{x\to\infty} x^N e^{-x} = 0.\ (N = 1, 2, \dots)$

e^x にマクローリンの定理を $n = N + 1$ として適用すると, ある数 $0 < \theta < 1$ があって

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} + \frac{e^{\theta x}x^{N+2}}{(N+2)!}$$

すべての項は >0 だから

$$> \frac{x^{N+1}}{(N+1)!}$$

がわかるから

$$0 < \frac{x^N}{e^x} < \frac{x^N}{\frac{x^{N+1}}{(N+1)!}} = \frac{(N+1)!}{x}$$

である．ところで $x \to +\infty$ とすると最後の項は $\to 0$ であるから，はさみうちの原理により $\lim_{x\to\infty} x^N e^{-x} = 0$. がわかる．
これは $x \to \infty$ としたとき e^x はどんな高次のべき関数 x^N よりも速く増加することを意味する。

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3} = -\frac{1}{6}$
$\sin x$ にマクローリンの定理を $n = 3$ として適用すると，ある数 $0 < \theta < 1$ があって

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\sin(\theta x)\, x^5}{5!}$$

がわかる．これを左辺に代入すると

$$\frac{\sin x - x}{x^3} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{\sin(\theta x) x^5}{5!} - x}{x^3} = -\frac{1}{3!} + \frac{\sin(\theta x)\, x^2}{5!}$$

$|\sin(\theta x)| \leq 1$ に注意すると $x \to 0$ のとき $\frac{\sin(\theta x)\, x^2}{5!} \to 0$ だから

$$\frac{\sin x - x}{x^3} \to -\frac{1}{6}.$$