電気のための微分積分 B 演習問題 No.1 解答

1 次の関数の増減・凹凸を調べ, 極値および変曲点を求めよ. また, グラフの概形を描け.

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2$,

[増減を調べる]

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

だから $f'(x) = 0$ となるのは $x = 0, 2$ のとき。また

$x < 0$ のとき $x < 0$ かつ $x - 2 < 0$ だから $f'(x) = 3x(x-2) > 0$, だからここで狭義単調増加

$0 < x < 2$ のとき $x > 0$ かつ $x - 2 < 0$ だから $f'(x) = 3x(x-2) < 0$, だからここで狭義単調減少

$x > 2$ のとき $x > 0$ かつ $x - 2 > 0$ だから $f'(x) = 3x(x-2) > 0$, だからここで狭義単調増加

[凹凸を調べる]

$f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$

だから $f''(x) = 0$ となるのは $x = 1$ のとき。また

$x < 1$ のとき $f''(x) < 0$ だから上に凸

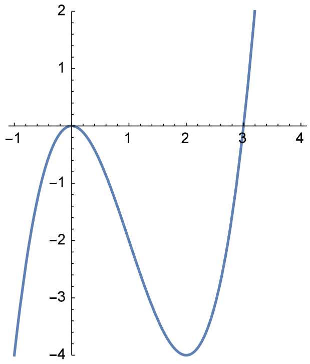
$x > 1$ のとき $f''(x) > 0$ だから下に凸

[増減表を書く] 以上から増減凹凸を調べると

x		0		1		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\searrow$	-4	$\nearrow$

となる. ここで $\nearrow$ は単調増加かつ上に凸, $\searrow$ は単調減少かつ上に凸, $\searrow$ は単調減少かつ下に凸, $\nearrow$ は単調増加かつ下に凸 を表す。

だから $x = 0$ で極大値 0 をとり $x = 2$ で極小値 -4 をとる. 変曲点は $(1, -2)$.



Mathematica で作図するにはコマンド

```
Plot[x^3 - 3 x^2, {x, -1, 4}]
```

を用いる.

(2) $f(x) = \dfrac{4}{x^2+3}$ とする。

[増減を調べる] $f(x) = 4(x^2+3)^{-1}$ とみる。

$f(x) = y$, $x^2+3 = t$ とおいて合成関数の微分法を使う.

$y = 4(x^2+3)^{-1}$ は $y = 4t^{-1}$, $t = x^2+3$ の合成関数である。

$y = 4t^{-1}$ の導関数は $\dfrac{dy}{dt} = 4\left(t^{-1}\right)' = 4(-1)t^{-2} = -\dfrac{4}{t^2}$

$x^2+3 = t$ の導関数は $\dfrac{dt}{dx} = \left(x^2+3\right)' = 2x$

合成関数の微分法により

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = -\frac{4}{t^2} \times 2x = \frac{-8x}{(x^2+3)^2}$$

である。だから $f'(x) = 0$ となるのは $x = 0$ のとき。またすべての x に対して $(x^2+3) > 0$ だから

$x < 0$ のとき $f'(x) > 0$, だからここで狭義単調増加

$0 < x$ のとき $f'(x) < 0$, だからここで狭義単調減少

[凹凸を調べる] 商の微分法により

$$f''(x) = \frac{(-8x)'(x^2+3)^2 - (-8x)\left\{(x^2+3)^2\right\}'}{(x^2+3)^4}$$

$$= \frac{-8(x^2+3)^2 + 8x \cdot 2(x^2+3) \cdot (2x)}{(x^2+3)^4}$$

$$= \frac{-8(x^2+3) + 8x \cdot 2 \cdot (2x)}{(x^2+3)^3} = \frac{-8x^2 - 24 + 32x^2}{(x^2+3)^3}$$

$$= \frac{24(x^2-1)}{(x^2+3)^3} = \frac{24(x+1)(x-1)}{(x^2+3)^3}$$

だから $f''(x) = 0$ となるのは $x = \pm 1$ のとき。また $x^2 + 3 > 0$ に注意して

$x < -1$ のとき $f''(x) > 0$ だから下に凸

$-1 < x < 1$ のとき $f''(x) < 0$ だから上に凸

$1 < x$ のとき $f''(x) > 0$ だから下に凸

[極限を調べる]

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{4}{x^2+3} = \frac{4}{\infty} = +0,$$

[増減表を書く] 以上から増減凹凸を調べると

x	$-\infty$		-1		0		1		∞
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	1	↗	$\frac{4}{3}$	↘	1	↘	0
			変曲点		極大		変曲点		

だから $x = 0$ で最大値 $\frac{4}{3}$ をとり, 変曲点は $(\pm 1, 1)$.