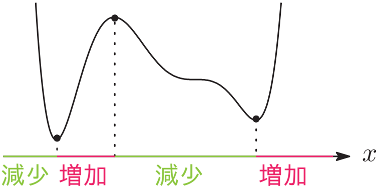
本日やること

1. 微分法の応用
   - 関数の増減・極値

微分法の応用
関数の増減・極値

[目標]



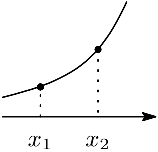
関数がどこで極値をとるかを知りたい。

微分法の応用

関数の増減・極値

関数の増減

[単調増加]



関数 $f(x)$ が区間 I で単調増加であるとは

$$x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) \leqq f(x_2)$$

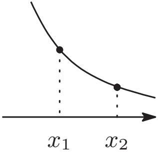
であること。

狭義単調増加であるとは

$$x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) < f(x_2)$$

であること。

[単調減少]



関数 $f(x)$ が区間 I で単調減少であるとは

$$x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) \geqq f(x_2)$$

であること。

狭義単調減少であるとは

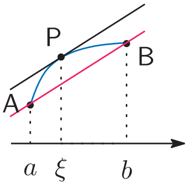
$$x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \ \Rightarrow \ f(x_1) > f(x_2)$$

であること。

微分法の応用

関数の増減・極値

Lagrange の平均値の定理



$f(x)$: $[a, b]$ で連続，(a, b) で微分可能

$$\Rightarrow \quad f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad a < \xi < b$$

となる ξ がある。

A$(a, f(a))$, B$(b, f(b))$ とおくと

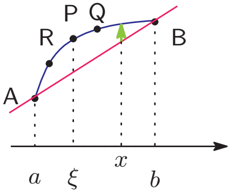
$$AB \text{ の傾き} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

であることに注意せよ。定理は AB と平行な接線を持つ点 P$(\xi, f(\xi))$ があることを主張している。

微分法の応用

関数の増減・極値

[確かめ]



じつは P は

$$F(x) = f(x) - \left\{ \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \right\}$$

の最大値 (または最小値) をとる点である。なぜなら $h > 0$ のとき $F(\xi) \geqq F(\xi \pm h)$ であるがこれから

$$(\text{PQ の傾き} =)\ \frac{f(\xi + h) - f(\xi)}{h} \leqq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqq \frac{f(\xi - h) - f(\xi)}{-h}\ (= \text{PR の傾き})$$

ここで $h \to 0$ として $f'(\xi) \leqq \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqq f'(\xi)$

すなわち $f'(\xi) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

微分法の応用

関数の増減・極値

関数の増減の判定条件

$f(x) : [a, b]$ で連続，(a, b) で微分可能 とする。

(i) 区間 (a, b) 上で $f'(x) = 0$

$\iff$ 区間 (a, b) で $f(x)$ は定数関数。

(ii) 区間 (a, b) 上で $f'(x) > 0$

$\Rightarrow$ 区間 (a, b) で $f(x)$ は狭義単調増加。

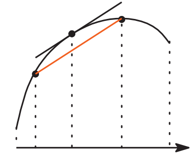
(iii) 区間 (a, b) 上で $f'(x) < 0$

$\Rightarrow$ 区間 (a, b) で $f(x)$ は狭義単調減少。

微分法の応用

関数の増減・極値

[$\Rightarrow$ の確かめ]



$a < x_1 < x_2 < b$ を任意にとる。Lagrange の平均値の定理により

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad a < \xi < b$$

となる ξ がある。

(i) のとき，$f'(\xi) = 0$ だから $f(x_1) = f(x_2)$.

(ii) のとき，$f'(\xi) > 0$ だから $f(x_1) < f(x_2)$.

(iii) のとき，$f'(\xi) < 0$ だから $f(x_1) > f(x_2)$.

$\Leftarrow$ は明らか。

微分法の応用

関数の増減・極値

極値の定義

$f(x)$ が点 a で極大になる

$\iff$ a の近所で最大になる

$\iff$ ある $\delta > 0$ があって $0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < f(a)$

極小も同様。

極大値と極小値をあわせて極値という。

微分法の応用

関数の増減・極値

極値の必要条件

$f(x)$ が微分可能で，ある点 a で極値をとる。

$\Rightarrow \quad f'(a) = 0$

[確かめ]　a で極大になるとする。$x \fallingdotseq a, x \neq a$ で $f(x) < f(a)$ だから

$$x \to a + 0 \text{ のとき} \quad 0 > \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \to f'(a)$$

だから $f'(a) \leqq 0$

$$x \to a - 0 \text{ のとき} \quad 0 < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \to f'(a)$$

だから $f'(a) \geqq 0$

あわせて $f'(a) = 0$

微分法の応用

関数の増減・極値

極値の十分条件

関数が微分可能で

(i) 点 a を境に単調増加から単調減少に変わるとき a で極小。

(ii) 点 a を境に単調減少から単調増加に変わるとき a で極大。

微分法の応用

関数の増減・極値

[例題]　$f(x) = 3x^4 - 4x^3$ の増減・極値を調べる。そのため 導関数の零点・符号を調べる。

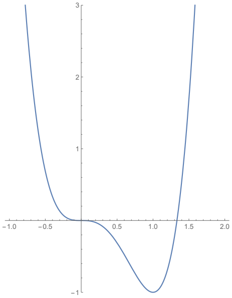
$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$$

$f'(x) = 0$ となる x の値は $x = 0, 1$ のみ。このほかの点では極値をとらない。

$x < 0$　では $x^2 > 0, x - 1 < 0$ だから $f'(x) < 0$

$0 < x < 1$ では $x^2 > 0, x - 1 < 0$ だから $f'(x) < 0$

$1 < x$　では $x^2 > 0, x - 1 > 0$ だから $f'(x) > 0$



増減表にまとめると

x	$x < 0$	0	$0 < x < 1$	1	$1 < x$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$

$x = 1$ で極小値 -1 をとる。