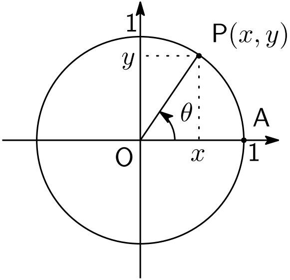
本日やること

1. 初等関数の導関数
   - 三角関数の導関数
   - 逆三角関数
   - 複素指数関数

初等関数の導関数

三角関数の導関数

復習　三角関数の定義



P を原点中心半径 1 の円周上を A$(1, 0)$ から正の向きに θ ラジアン回転した点とし，P の座標を (x, y) とするとき

$\cos\theta = x$: 余弦

$\sin\theta = y$: 正弦

$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$: 正接

と定める。(分母が 0 となるときは定義しない)

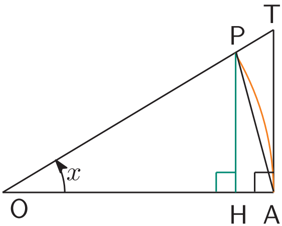
また，これらによって定められる関数 $f(\theta) = \sin\theta$ 等を三角関数という．

初等関数の導関数

三角関数の導関数

三角関数の基本極限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$



[確かめ] $0<x<\dfrac{\pi}{2}$, $x\to +0$ とする.

PH$=\sin x$,　弧 $\overset{\frown}{\mathrm{PA}}=x$,　TA $=\tan x$

△OPA, 扇型 OPA, △OTA の面積を比較

$$0<\frac{1}{2}\sin x<\frac{x}{2}<\frac{1}{2}\tan x\ \left(=\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

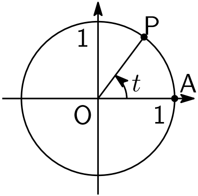
$\cos x\to 1$ であるからはさみうちの原理により $\frac{\sin x}{x}\to 1$

$x\to -0$ の場合も同様.

初等関数の導関数

三角関数の導関数

等速円運動



動点 P は原点中心半径 1 の円周上を角速度 1 (rad/sec) で回転している。

$t = 0$ のとき P=A

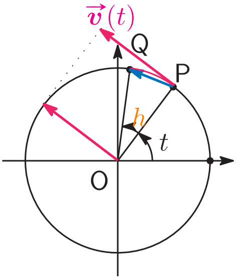
ならば

時刻 t の P の座標 $= (\cos t, \sin t)$

初等関数の導関数

三角関数の導関数

等速円運動の速度ベクトル



P の速度ベクトル $\vec{v}(t)$ を

$$\vec{v}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{h}$$

で定める。ただし

P : 時刻 t の点,　Q : 時刻 $t+h$ の点

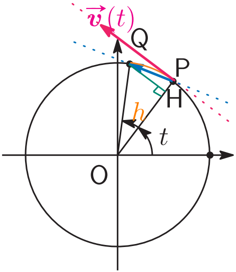
このとき

$$\vec{v}(t) = \left(\cos\left(t + \frac{\pi}{2}\right), \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

$$= (-\sin t, \cos t) \cdots (\star)$$

初等関数の導関数

三角関数の導関数



[確かめ] (i) $\vec{v}(t)$ の向きは接線方向で正の回転の向きである．なぜなら直線 PQ は $h \to 0$ のとき接線に近づくから。

(ii) $\vec{v}(t)$ の大きさは 1 である．なぜなら

$$\frac{\mathrm{QH}}{h} = \frac{\sin h}{h} \leqq \left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{h}\right| \leqq \frac{\overset{\frown}{\mathrm{PQ}}}{h} = 1$$

かつ $\dfrac{\sin h}{h} \to 1$ だから。

(i), (ii) より $\vec{v}(t)$ は $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (\cos t, \sin t)$ を $\dfrac{\pi}{2}$ だけ回転したものだから $(\star)$ がわかる．

初等関数の導関数

三角関数の導関数

一方, $\mathrm{P}(\cos t, \sin t)$, $\mathrm{Q}(\cos(t+h), \sin(t+h))$ だから

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\cos(t+h)-\cos t, \sin(t+h)-\sin t)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \left(\frac{\cos(t+h)-\cos t}{h}, \frac{\sin(t+h)-\sin t}{h} \right) \\ &= \left(\lim_{h\to 0} \frac{\cos(t+h)-\cos t}{h}, \lim_{h\to 0} \frac{\sin(t+h)-\sin t}{h} \right) \\ &= ((\cos t)', (\sin t)')\end{aligned}$$

でもあるから, $(\star)$ と比較して

$$((\cos t)', (\sin t)') = (-\sin t, \cos t)$$

同様にして, 等速円運動に限らず時刻 t での座標が $(f(t), g(t))$ である動点 P の速度ベクトルは成分表示すると

$$\vec{v}(t) = (f'(t), g'(t))$$

となることがわかる。

初等関数の導関数

三角関数の導関数

三角関数の導関数

(i) $(\cos x)' = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin x,$

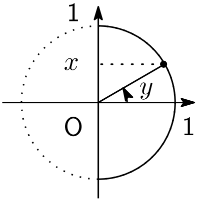
(ii) $(\sin x)' = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos x$

[確かめ]　前節より明らか。

初等関数の導関数

逆三角関数の導関数

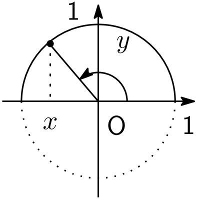
逆三角関数の定義



$$y = \sin^{-1} x, \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

$$\iff$$

$$x = \sin y, \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq y \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$



$$y = \cos^{-1} x, \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

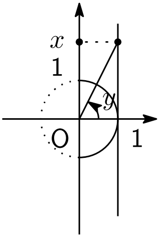
$$\iff$$

$$x = \cos y, \quad (0 \leqq y \leqq \pi)$$

初等関数の導関数

逆三角関数の導関数

逆三角関数の定義



$$y = \tan^{-1} x, \quad (-\infty < x < \infty)$$

$$\iff$$

$$x = \tan y, \quad \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$$

初等関数の導関数

逆三角関数の導関数

逆三角関数の導関数

(i) $(\sin^{-1} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1 < x < 1)$

(ii) $(\cos^{-1} x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1 < x < 1)$

(iii) $(\tan^{-1} x)' = \dfrac{1}{1+x^2} \qquad (-\infty < x < \infty)$

初等関数の導関数

逆三角関数の導関数

[(i) の確かめ] $y = \sin^{-1} x$ とおくと $x = \sin y$.

$$-1 < x < 1 \;\Rightarrow\; -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow \cos y > 0$$
$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy}\sin y = \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2} > 0$$

であるから逆関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

初等関数の導関数

逆三角関数の導関数

[(iii) の確かめ]　$y = \tan^{-1} x$ とおくと $x = \tan y$.

$$\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \text{ だから } \cos y > 0$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy} \tan y = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2 > 0$$

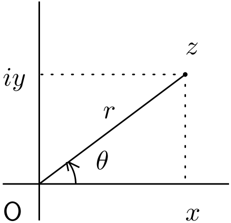
であるから逆関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1 + x^2}$$

初等関数の導関数

複素指数関数

復習 複素数の極形式



複素数 $z = x + iy$ に対して

$r =$ 点 z と原点 O の距離,
$\theta =$ 線分 Oz と 実軸の正の部分とのなす角

とおくと,

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

と表される．これを複素数 z の極形式という．

$r = |z|$: 絶対値,
$\theta = \arg z$: 偏角

初等関数の導関数

複素指数関数

復習 回し伸ばしの原理

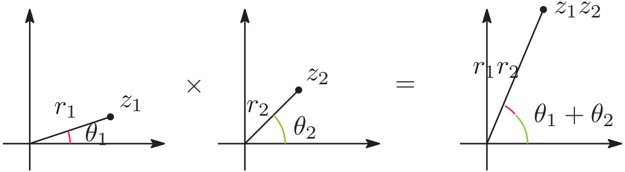
2 つの複素数 z_1, z_2 の積 $z_1 z_2$, 商 $\dfrac{z_1}{z_2}$ は

(i) $\arg\, z_1 z_2 = \arg\, z_1 + \arg\, z_2$, $\qquad |z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

(ii) $\arg\, \dfrac{z_1}{z_2} = \arg\, z_1 - \arg\, z_2$, $\qquad \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$

によって決まる.

(i) は

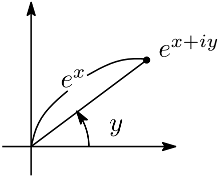


ということ

初等関数の導関数

複素指数関数

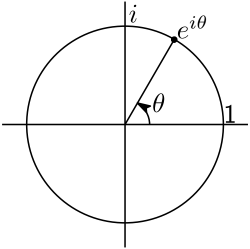
複素指数関数の定義



指数関数 e^x を拡張して複素数 $x+iy$ に対して複素指数関数 e^{x+iy} を

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

で定める。



とくに θ を実数とするとき

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \quad \text{Euler の公式}$$

$$|e^{i\theta}| = 1, \quad \arg e^{i\theta} = \theta$$

初等関数の導関数

複素指数関数

複素指数関数の性質

[複素指数法則]　z_1, z_2：複素数

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$$

[複素指数関数の導関数]　z を複素数の定数, t を実数の変数とするとき, 複素数値をとる関数 $f(t) = e^{zt}$ の導関数は

$$\frac{d}{dt}e^{zt} = ze^{zt}$$

ただし複素数値をとる関数の導関数は i を通常の定数と同じように扱って計算するものとする。