本日やること

1. 初等関数の導関数
   - 逆関数の微分法
   - 指数関数・対数関数の導関数
   - 対数微分法

初等関数の導関数

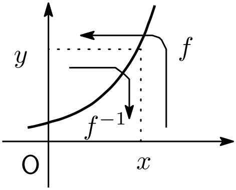
逆関数の微分法

逆関数

$$X \xrightarrow{f} Y$$

$$x \qquad y$$

$$y = f(x)$$



X : f の定義域
$Y = f(X)$: f の値域 のとき
関数 f が 1 対 1 であるとは
「$f(x_1) = f(x_2) \iff x_1 = x_2$」
このとき

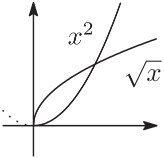
$$x = f^{-1}(y) \iff y = f(x)$$

で決まる関数
$f^{-1} : Y \to X$
を f の逆関数という.

初等関数の導関数

逆関数の微分法

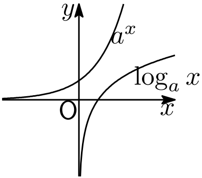
[例]



$y = x^2$, $(x \geqq 0)$ の逆関数は $x = \sqrt{y}$

変数 x, y をとりかえて $y = \sqrt{x}$ と表す必要は必ずしもない。

変数を取り換えると二つの関数のグラフは $y = x$ に関して対称になる。



$a > 0$, $a \neq 1$ とする。

$y = a^x$ の逆関数は $x = \log_a y$, $(y > 0)$

初等関数の導関数

逆関数の微分法

逆関数の微分法

(i) 関数 $y = f(x)$ が区間 I で連続かつ狭義単調であるとすると逆関数が存在して連続である.

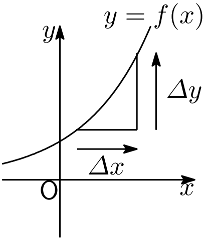
(ii) さらに $f(x)$ が I で微分可能で $f'(x) \neq 0$ ならば, 逆関数 $x = f^{-1}(y)$ も $f(I)$ で微分可能で次が成り立つ：

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$$

初等関数の導関数

逆関数の微分法

[確かめ]



$\Delta x (\neq 0)$: x の増分

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$: y の増分.

とすると

$\Delta x = f^{-1}(y + \Delta y) - f^{-1}(y)$

$f'(x) \neq 0$ ならば

$\Delta x \to 0 \iff \Delta y \to 0$

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\dfrac{\Delta y}{\Delta x}}$$

ここで $\Delta x, \Delta y \to 0$ とすると $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

ネイピアの数 e

次の極限が存在する:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

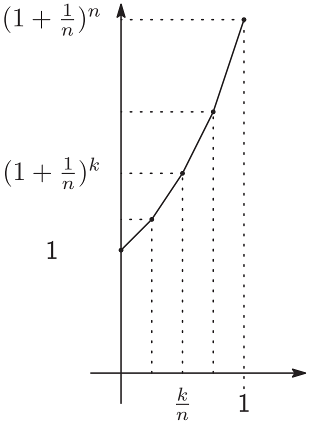
この極限の値 e はネイピアの数とよばれ, 無理数である。円周率 π と並んで最重要の定数である。

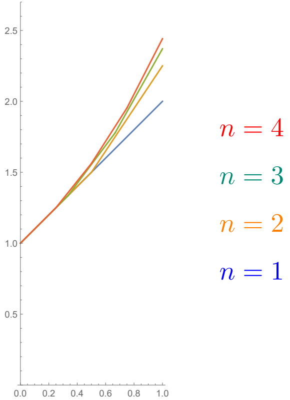
$$e = 2.718281828459\cdots$$

である。

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数





初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

自然対数・常用対数

$\log_e x$ は 自然対数と呼ばれ, 記号

$\log x$ あるいは $\ln x$

で表す.

これに対して 10 を底とする対数を常用対数と呼ぶ.

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

定理 4.11 対数関数の導関数

(i) $(\log x)' = \dfrac{1}{x}, \quad (x > 0)$

(ii) $(\log |x|)' = \dfrac{1}{x}, \quad (x \neq 0)$

[(i) の確かめ] 左辺 $= \displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h}$ であり

$$\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{h} \log \frac{x+h}{x} = \log \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \log \left\{ \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} \right\}^{\frac{1}{x}}$$

$$= \frac{1}{x} \log \left\{ \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} \right\} \to \frac{1}{x} \log e = \frac{1}{x}$$

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

[(ii) の確かめ]　$x > 0$ のとき：$|x| = x$ であるから (i) と同じ。
$x < 0$ のとき：$t = -x$ とおくと $|x| = t > 0$ であるから合成関数の微分法により

$$(\log|x|)' = \frac{d\ \log t}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \times (-1) = \frac{1}{x}.$$

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

定理 4.12　指数関数の導関数

$$(e^x)' = e^x$$

[確かめ]
$y = e^x$ とおく．$x = \log y$ であるから逆関数の微分法により

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}\log y} = \frac{1}{\dfrac{1}{y}} = y = e^x,$$

初等関数の導関数

指数関数・対数関数の導関数

[例]

(i) $(e^{ax})' = ae^{ax} \quad (a$; 定数)

(ii) $(a^x)' = a^x \log a \quad (a$: 1 でない正の定数)

[(i) の確かめ] $ax = t$ とおき合成関数の微分法を使うと

$$\text{左辺} = \frac{d}{dx}e^{ax} = \frac{d}{dt}e^t \times \frac{dt}{dx}$$

定理 4.12 より $\frac{d}{dt}e^t = e^t$ だから

$$= e^t \times a = a\,e^{ax} = \text{右辺}.$$

[(ii) の確かめ] $a = e^{\log a}$ だから $a^x = e^{x \log a}$. これと (i) により

$$\text{左辺} = e^{x \log a} \log a = \text{右辺}$$

$(a^x)' = a^x$ となるのは $a = e$ のときだけである。

初等関数の導関数

対数微分法

定理 4.13　対数微分

関数 $f(x)$ が微分可能であるとき，

$$(\log|f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

[確かめ]　$t = f(x)$ とおいて合成関数の微分法を使うと

$$\frac{d}{dx}\log|f(x)| = \left(\frac{d}{dt}\log|t|\right)\frac{dt}{dx} = \frac{1}{t}f'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

初等関数の導関数

対数微分法

[例] $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ (α：実数の定数) の証明。

$y = x^\alpha$ とおき両辺の対数をとると,

$$\log y = \log x^\alpha = \alpha \log x$$

両辺を x で微分すると

$$\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x}$$

したがって

$$y' = \frac{\alpha}{x} \times y = \frac{\alpha}{x} \times x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$$