本日やること

1. 初等関数の導関数
   - 復習
   - 合成関数の微分法

初等関数の導関数

復習：べき関数の導関数

復習：べき関数の導関数

$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$ 　αは実数の定数

[例]

$\alpha = 0$ のとき $1 = x^0$ だから　$(1)' = 0 \cdot x^{-1} = 0$ （ $x = 0$ のときも正しい）

$\alpha = 1$ のとき $x = x^1$ だから　$(x)' = 1 \cdot x^0 = 1$

$\alpha = n,\ n = 1, 2, \cdots$ のとき　$(x^n)' = nx^{n-1}$

$\alpha = \dfrac{1}{2}$ のとき $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ だから　$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{-1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0$ のとき正しい)

$\alpha = -1$ のとき $\dfrac{1}{x} = x^{-1}$ だから　$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -x^{-2} = \dfrac{-1}{x^2}$ $(x \neq 0$ のとき正しい)

初等関数の導関数

復習：定数倍・和・差・積・商の導関数

復習：定数倍・和・積・商の微分法の微分法)

$f(x),\ g(x)$ ：**微分可能**，　k ：**定数**

$\Rightarrow\quad kf(x),\ f(x)+g(x),\ f(x)g(x),\ \dfrac{f(x)}{g(x)}$ **も微分可能で**

(i) $(kf(x))' = kf'(x)$

(ii) $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$

(iii) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ 　**(積の微分法)**

(iv) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$ 　**(商の微分法)**

初等関数の導関数

[問題]:

$f(x) = (x^2 + 3x + 2)^5$ のとき,

$$f'(x) = (2x+3)^5 \quad ?$$
$$f'(x) = 5(x^2+3x+2)^4 \quad ?$$
$$f'(x) = 5(2x+3)^4 \quad ?$$

どれも誤り!

初等関数の導関数

合成関数

合成関数の定義

関数 $t = g(x)$, $y = f(t)$ に対して

$$f \circ g(x) = f(g(x)),\ x \in X$$

で決まる関数 $g \circ f$ を f, g の合成関数という.

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{g} & T & \xrightarrow{f} & Y \\ x & & t & & y \\ & t = g(x) & & y = f(t) & \end{array}$$

初等関数の導関数
合成関数の例

[合成関数の例]

$y=f(t)$, $t=g(x)$ の合成関数は $y=f(g(x))$.

$y=t^5$, $t=x^2+3x+2$ の合成関数は $y=(x^2+3x+2)^5$.

$y=\sqrt{t}$, $t=x^2+3x+2$ の合成関数は $y=\sqrt{x^2+3x+2}$.

$y=\sin t$, $t=x^2+3x+2$ の合成関数は $y=\sin(x^2+3x+2)$.

初等関数の導関数

合成関数の微分法

定理 4.7. 合成関数の微分法

$y = f(t)$, $t = g(x)$ ：**微分可能** $\Rightarrow$ $y = f(g(x))$ ： **微分可能で**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}, \qquad \Bigl(\text{または}\ (f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)\Bigr)$$

初等関数の導関数

合成関数の微分法

[確かめ]　導関数の定義より

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x}$$
$$\frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)) - f(t)}{\Delta t}$$
$$\frac{dt}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

である。

$$g(x+\Delta x) - g(x) = \Delta t, \quad f(t+\Delta t)) - f(t) = \Delta y$$

とおくと $f(g(x+\Delta x)) - f(g(x)) = f(g(x)+\Delta t) - f(t) = \Delta y$ だから

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \quad \frac{dy}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}, \quad \frac{dt}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

初等関数の導関数

合成関数の微分法

$$x \quad \xmapsto{g} \quad t \quad \xmapsto{f} \quad y$$

増分:$\varDelta x$　　増分:$\varDelta t$　　増分:$\varDelta y$

ここで

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta t} \times \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

であるが, $\varDelta x \to 0$ とすると $\varDelta t \to 0$ でもあるから

$$\text{右辺} \to \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$$

したがって

$$\text{左辺} \to \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$$

初等関数の導関数

合成関数の微分法

[例題] (1) $f(x) = (x^2 + 3x + 2)^5$ の導関数を求める。

$y = f(x)$, $t = x^2 + 3x + 2$ とおく.

関数 $y = (x^2 + 3x + 2)^5$ は関数 $y = t^5$, $t = x^2 + 3x + 2$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 + 3x + 2) = 2x + 3$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(t^5) = 5\,t^4$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 5\,t^4 \times (2x + 3) = 5(2x + 3)(x^2 + 3x + 2)^4$$

である.