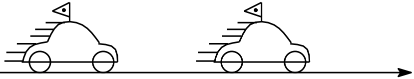
本日やること

1. 初等関数の導関数
    - 初等関数
    - べき関数の導関数
    - 定数倍・和の微分法
    - 積・商の微分法

復習：微分係数・導関数

復習：微分係数・導関数

時刻 a $a+h$



座標 $f(a)$ $f(a+h)$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

a における微分係数

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

導関数

初等関数の導関数

初等関数

[初等関数]
$+$, $-$, $\times$, $\div$, $\sqrt[n]{\ }$, 三角関数, 逆三角関数, 指数関数, 対数関数を組み合わせて作られるような関数. (正式な定義ではない)

初等関数の導関数は初等関数。(これから確かめます)

初等関数の導関数

べき関数の導関数

$f(x) = x^{\alpha}$ (α は任意の実数の定数) で定義される関数を**べき関数**という.

定数関数の導関数

$f(x) = C$ (C : 定数) のとき $f'(x) = 0$ 　つまり

$(C)' = 0$ (C は定数)

[確かめ] $f(x) = C$ だから定義より

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{C - C}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

初等関数の導関数

べき関数の導関数

x の導関数

$f(x) = x$ のとき $f'(x) = 1$ 　つまり

$$(x)' = 1$$

[確かめ] $f(x) = x$ だから $f(x+h) = x + h$ で

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1.$$

初等関数の導関数

べき関数の導関数

x^2 の導関数

$f(x) = x^2$ のとき $f'(x) = 2x$ 　つまり

$$(x^2)' = 2x$$

[確かめ] $f(x) = x^2$ だから $f(x+h) = (x+h)^2$ で

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x.$$

初等関数の導関数

べき関数の導関数

x^n の導関数

$f(x) = x^n \ \ (n = 1, 2, \cdots)$ のとき $f'(x) = nx^{n-1}$ 　つまり

$$(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n = 1, 2, \cdots$$

[準備：二項定理]　$(a+b)^n$ を展開すると

$$\begin{array}{ccccc} (a+b) & (a+b) & (a+b) & \cdots & (a+b) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \\ a & b & a & \cdots & a \end{array}$$

のように各 $(a+b)$ から a, b の一方を取り出してかけ合わせたものの総和になる。

$a^k b^{n-k}$ の数は ${}_n\mathrm{C}_k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$ だから

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_n a^n + {}_n\mathrm{C}_{n-1} a^{n-1} b + \cdots + {}_n\mathrm{C}_0 b^n$$

初等関数の導関数

べき関数の導関数

[確かめ] $f(x) = x^n$ だから $f(x+h) = (x+h)^n$. ここで

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + {}_nC_2 x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n$$

だから

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{nx^{n-1}h + (h \text{ について 2 次以上の項})}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (nx^{n-1} + (h \text{ について 1 次以上の項})) = nx^{n-1}. \end{aligned}$$

初等関数の導関数

べき関数の導関数

$\dfrac{1}{x}$ の導関数

$f(x) = \dfrac{1}{x}$ のとき $f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ 　つまり

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2} \quad (x \neq 0 \text{ のとき})$$

[確かめ] $f(x) = \dfrac{1}{x}$ だから $f(x+h) = \dfrac{1}{x+h}$ で

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{1}{(x+h)} - \frac{1}{x}\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

初等関数の導関数

べき関数の導関数

$\sqrt{x}$ の導関数

$f(x)=\sqrt{x}$ のとき $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ 　つまり

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x\neq 0 \text{ のとき})$$

[確かめ] $f(x)=\sqrt{x}$ だから $f(x+h)=\sqrt{x+h}$ で

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{(x+h)-x}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

初等関数の導関数

べき関数の導関数

まとめると

$$(x^{n})' = nx^{n-1}$$

$$(x^{-1})' = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2} = (-1)x^{-2} = -1x^{-1-1}$$

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$$

だから

べき関数の導関数

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$$ αは実数の定数

証明は後回しにします。

初等関数の導関数

べき関数の導関数

[例]

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}}$$

初等関数の導関数

定数倍・和の微分法

定理 4.6 (定数倍・和の微分法)

$f(x),\ g(x)$ ： 微分可能, k ： 定数 $\Rightarrow$ $kf(x),\ f(x)+g(x)$ も微分可能で

(i) $(kf(x))' = kf'(x)$

(ii) $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$

[(ii) の確かめ]

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(f(x+h)-f(x))+(g(x+h)-g(x))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \text{右辺}
\end{aligned}
$$

初等関数の導関数

定数倍・和の微分法

[例]

$$
\begin{aligned}
(2x^3 + 4x - 3)' &= (2x^3)' + (4x)' + (-3)' \\
&= 2(x^3)' + 4(x)' + (-3)' \\
&= 2 \times 3x^2 + 4 \times 1 + 0 \\
&= 6x^2 + 4
\end{aligned}
$$

初等関数の導関数

積・商の微分法

定理 4.9 (積・商の微分法)

$f(x)$, $g(x)$ ：微分可能

$\Rightarrow$ $f(x)g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ も微分可能で (分母 $\neq 0$ である点で)

(i) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ (積の微分法)

(ii) $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$ (商の微分法)

初等関数の導関数

積・商の微分法

[(i) の確かめ]

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\
&\qquad=\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)}{h}\\
&\qquad=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x+h)+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}
\end{aligned}$$

ここで $\frac{(f(x+h)-f(x))}{h} \to f'(x)$, $\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \to g'(x)$, $g(x+h) \to g(x)$ だから

$$\to f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$