本日やること

1. 連続関数
   - 連続関数の定義
   - 連続関数の性質
2. 微分係数・導関数
   - はやさと速度
   - 微分係数・導関数の定義
   - 微分係数とグラフの接線

連続関数

連続関数の定義

連続関数の定義

$f(x)$: 区間 I で定義された関数, $a \in I$ のとき

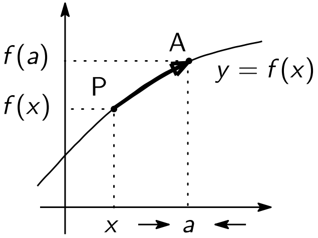
(*i*) $f(x)$ が $x = a$ で (または点 a で) 連続 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

(a が区間の端点であるときは片側極限値を考える.)

(*ii*) $f(x)$ が 区間 I で連続 $\Leftrightarrow$ $f(x)$ が 区間 I の各点で連続

連続関数

連続関数の性質



A$(a, f(a))$, P$(x, f(x))$ とする。
$f(x)$ が点 a で連続ならば

$$x \to a \;\Rightarrow\; f(x) \to f(a) \Rightarrow\; \mathrm{P} \to \mathrm{A}$$

だからグラフは点 A でつながっている。

$f(x), g(x)$ が (点でまたは区間で) 連続 $\Rightarrow$

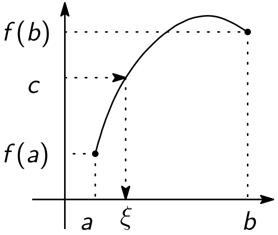
$$f(x) \pm g(x), f(x)g(x), \frac{f(x)}{g(x)} \text{ (分母} \neq 0 \text{ となる点で) も連続}$$

だから多項式関数, 有理関数は定義域で連続。
指数関数, 三角関数も作り方から連続であることがわかる。

連続関数

連続関数の性質

中間値の定理



関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続であり，さらに $f(a) < f(b)$ であるならば，$f(a) < c < f(b)$ であるようなどんな実数 c に対しても

$$f(\xi) = c$$

を満たすような実数 ξ が区間 $[a, b]$ に少なくとも 1 つ存在する．$f(a) > f(b)$ であるときも同様である．

連続関数

連続関数の性質

最大値最小値の定理

関数 $f(x)$ が有界閉区間 $[a, b]$ で連続であるならば $f(x)$ が最大値をとる点および最小値をとる点がこの区間に存在する.

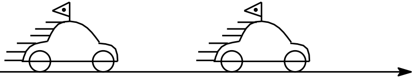
微分係数・導関数

はやさと速度

はやさと速度

$\text{はやさ} = \dfrac{\text{みちのり}}{\text{かかったじかん}}$ を精密化する

時刻　t　　$t+h$



座標　$f(t)$　　$f(t+h)$

(時刻 t から $t+h$ までの) 平均の速度 $= \dfrac{f(t+h)-f(t)}{h}$

負の値も取りうることに注意

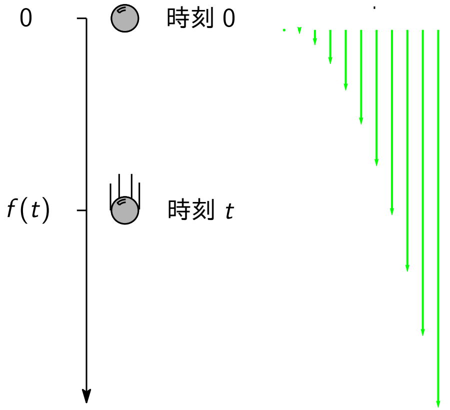
(時刻 t の) 瞬間の速度 $= \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$

$\frac{0}{0}$ 型の不定形であることに注意

微分係数・導関数

はやさと速度

[どうして瞬間の速度を考えるのか・自由落下]



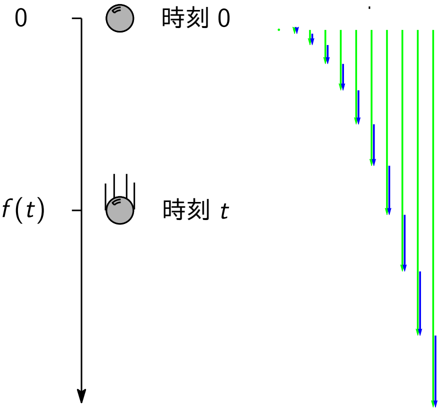
$$f(t) = \frac{1}{2}gt^2 \ (\mathrm{m})$$

(g : 重力加速度)

微分係数・導関数

はやさと速度

[どうして瞬間の速度を考えるのか・自由落下]



$$f(t) = \frac{1}{2}gt^2 \ (\mathrm{m})$$

(g : 重力加速度)

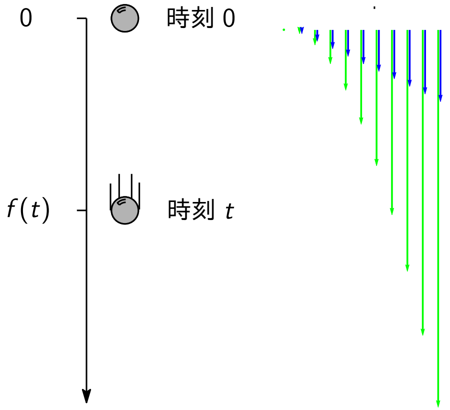
平均の速度

$$= \frac{\frac{1}{2}g(t+h)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{h}$$

微分係数・導関数

はやさと速度

[どうして瞬間の速度を考えるのか・自由落下]



$$f(t) = \frac{1}{2}gt^2 \ (\mathrm{m})$$

(g : 重力加速度)

平均の速度

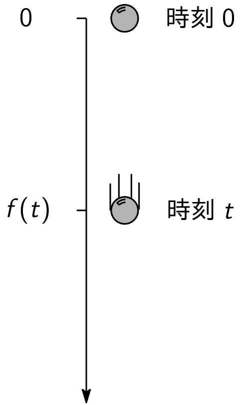
$$= \frac{\frac{1}{2}g(t+h)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{h}$$

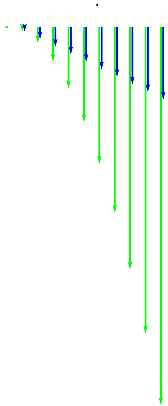
$$= gt + \frac{1}{2}gh$$

微分係数・導関数

はやさと速度

[どうして瞬間の速度を考えるのか・自由落下]





$$f(t) = \frac{1}{2}gt^2 \ (\mathrm{m})$$

(g : 重力加速度)

平均の速度

$$= \frac{\frac{1}{2}g(t+h)^2 - \frac{1}{2}gt^2}{h}$$

$$= gt + \frac{1}{2}gh$$

ここで $h \to 0$ として極限をとると

瞬間の速度 $v = gt$ (m/s)

がえられる。

微分係数・導関数

運動の法則

Newton の運動の法則 その 3 運動方程式

物体に力 $F(t)$ が働くときその物体には

$$F(t) = ma(t)$$

で決まる加速度 $a(t)$ が生じる.

今の場合 $a(t) = g$ (一定) だから一定の力 $F = mg$ で引っ張られていることになる。これが重力。

平均の速度は t に比例するとは言えないから加速度一定とは言えずこの法則は見えてこない。瞬間の速度を考えることが必要である。

微分係数・導関数

微分係数・導関数の定義

微分係数の定義

$f(x)$ が $x = a$ で (または点 a で) 微分可能

$$\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdots (\star) \text{ が存在}$$

$(\star)$ を $f(x)$ の $x = a$ におけるまたは点 a における微分係数といい,

$$f'(a), \quad \frac{df}{dx}(a), \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a}, \cdots$$

で表す．つまり

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

微分係数・導関数

導関数の定義

導関数の定義

$f(x)$ が 区間 I で微分可能であるとは, 区間 I の各点で微分可能であること

このとき 関数 $x \mapsto f'(x)$ を, 関数 $f(x)$ の導関数といい, 記号

$$f', \quad f'(x), \quad (f(x))', \quad \frac{df}{dx}, \quad \frac{d}{dx}f(x), \quad y', \quad \frac{dy}{dx}$$

などで表す. つまり

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

微分係数・導関数

微分可能性と連続性

関数 $f(x)$ が点 a で微分可能 $\Rightarrow$ 点 a で連続

逆は成り立たない。

[確かめ]

$x \to a$ とするとき

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \times (x - a) \to f'(a) \times 0$$

だから $f(x) \to f(a)$

微分係数・導関数

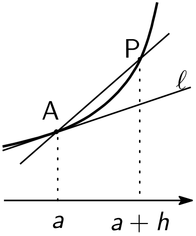
微分係数とグラフの接線

微分係数とグラフの接線

$f(x)$ が点 a で微分可能 $\Rightarrow$ グラフは点 $\mathrm{A}(a, f(a))$ で接線を持つ.

ただし接線とは A をとおり傾き $f'(a)$ の直線の事とする. 方程式は

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$



$\mathrm{P}(a+h, f(a+h))$ とおく

AP の傾き $= \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} \cdots \star$

ℓ の傾き $= f'(a) \cdots \star\star$

$h \to 0$ とすると $\star \to \star\star$ だから AP$\to \ell$ と考えられる。したがって ℓ は接線。