ガイダンス

電気のための微分積分 A

必修　1 単位

内容：

- 初等関数の極限
- 微分法
- 応用 ＝ 極値問題その他

実施方法：

電気リメディアル数学演習（火曜日）と一体のものとして行うので、そちらも必ず出るように。

演習問題は、主に電気リメディアル数学演習の時間に解説をする。

最後に期末試験をする。多分対面になる。

試験と演習問題の提出を見て成績を付ける。演習の比率が重いので必ず提出してください。

スライドを印刷して利用すること。

本日やること

1. 数列の極限
   - 数列の極限の定義
   - 数列の極限の性質
   - ± 0, $\pm\infty$ を含む極限
   - 不定型の極限
   - 有界性・単調性
   - 有界な単調数列
   - 等比数列の極限
2. 関数の極限
   - 関数の極限の定義
   - 関数の極限の性質

数列の極限

数列の極限の定義

数列の極限の定義

$\{a_n\}$: 数列, α : 定数　のとき

「数列 $\{a_n\}$ は極限 (値) α に収束する」

$\Leftrightarrow$「n が限りなく大きくなる時 a_n は限りなく α に近づく」

記号 : $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, または $a_n \to \alpha$, $(n \to \infty)$ で表す。

「数列 $\{a_n\}$ は発散する」 $\Leftrightarrow$ 「どんな α にも収束しない」

「数列 $\{a_n\}$ は正の (負の) 無限大に発散する」

$\Leftrightarrow$「a_n $(-a_n)$ が限りなく大きくなる」

記号 : $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$, または $a_n \to \pm\infty$, $(n \to \infty)$ で表す。

[例] $\lim_{n\to\infty} n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

数列の極限

数列の極限の性質

定理 3.3　数列の極限の性質

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$ とするとき,

(i) $\lim_{n\to\infty} ka_n = k\alpha \qquad (k$ は定数$)$

(ii) $\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$

(iii) $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \alpha\beta$

(iv) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\alpha}{\beta} \qquad$ (ただし, $\beta \neq 0$)

(v) $a_n \leqq b_n,\ (n = 1, 2, \cdots) \ \Rightarrow\ \alpha \leqq \beta.$

(vi) $a_n \leqq c_n \leqq b_n,\ (n = 1, 2, \cdots),\ \alpha = \beta$

$\Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} c_n = \alpha = \beta.$ (はさみうちの原理)

数列の極限

数列の極限の性質

[例] $n \to \infty$ とするとき

$$\frac{n}{2n-1} = \frac{n \times \frac{1}{n}}{(2n-1) \times \frac{1}{n}} = \frac{1}{2 - \frac{1}{n}}$$

$$\left(ところで\ \frac{1}{n} \to 0\ だから \right)$$

$$\to \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}$$

数列の極限

±0, ±∞ を含む極限

n $\to \infty$ のとき

「$a_n > 0$ かつ $a_n \to 0$」を $\lim_{n\to\infty} a_n = +0$ または $a_n \to +0$ で表す。

「$a_n < 0$ かつ $a_n \to 0$」を $\lim_{n\to\infty} a_n = -0$ または $a_n \to -0$ で表す。

[例] $a_n \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{a_n} \to +0$ が分かっている。

[例] $a_n \to$ 正の数, $b_n \to +\infty \quad \Rightarrow \quad \dfrac{a_n}{b_n} \to +0$ が分かっている。

このことから $\dfrac{\text{正の数}}{\pm\infty} = \pm 0$ と約束すると定理 3.3 の (iv) は $\alpha > 0$, $\beta = +\infty$ の時も成り立つ。

同様に

数列の極限

±0, ±∞ を含む極限

±0, ±∞ を含む極限の約束

$$\frac{\text{正の数}}{\pm\infty} = \pm 0 \qquad \frac{\text{負の数}}{\pm\infty} = \mp 0$$

$$\frac{\text{正の数}}{\pm 0} = \pm\infty \qquad \frac{\text{負の数}}{\pm 0} = \mp\infty$$

$$\text{正の数} \times (\pm\infty) = \pm\infty \qquad \text{負の数} \times (\pm\infty) = \mp\infty$$

$$(\pm\infty) \times (\pm\infty) = +\infty \qquad (\pm\infty) \times (\mp\infty) = -\infty$$

$$\text{実数} + (\pm\infty) = \pm\infty \qquad (\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$$

[例] $n \to \infty$ のとき

$$\frac{1}{n} \to \frac{1}{+\infty} = +0$$

$$\frac{1}{2n-1} \to \frac{1}{2\times(+\infty)-1} = \frac{1}{(+\infty)-1} = \frac{1}{(+\infty)} = +0$$

数列の極限

不定型の極限

不定型の極限

形式的に

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad \infty - \infty, \cdots$$

の形になる極限は，場合により結果が異なるので要注意。

[例] $\frac{\infty}{\infty}$ 型不定型の極限は場合による。。

$$\frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2-\frac{1}{n}} \to \frac{1}{2-0} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{n}{2n^2-1} = \frac{1}{2n-\frac{1}{n}} \to \frac{1}{+\infty-0} = 0$$

数列の極限
有界性・単調性

[有界性]

数列 $\{a_n\}$ が上に (下に) 有界
$\Leftrightarrow$ ある数 M があって $a_n \leqq M$ ($\geqq M$) $(n = 1, 2, \cdots)$

数列 $\{a_n\}$ が有界
$\Leftrightarrow$ 上に有界かつ下に有界

[単調性]

数列 $\{a_n\}$ が単調増加 (単調減少)
$\Leftrightarrow$ $a_n \leqq a_{n+1}$ $(a_n \geqq a_{n+1})$ $(n = 1, 2, \cdots)$

数列 $\{a_n\}$ が狭義単調増加 (狭義単調減少)
$\Leftrightarrow$ $a_n < a_{n+1}$ $(a_n > a_{n+1})$ $(n = 1, 2, \cdots)$

数列の極限

有界な単調数列

有界な単調数列の極限

上に有界な単調増加数列は収束する．また，下に有界な単調減少数列 は収束する．

もちろん有界でない単調数列は ∞ か $-\infty$ に発散する．しかし，有界ならば必ず収束することを証明するためには実数の連続性が必要である．ここでは証明は省略する．

数列の極限

等比数列の極限

等比数列の単調性・極限

等比数列 $\{r^n\}$ は

(i) $r > 1 \Rightarrow$ 狭義単調増加

$0 < r < 1 \Rightarrow$ 狭義単調減少

$r < 0 \Rightarrow$ 単調でない

(ii)

$$\lim_{n\to\infty} r^n = \begin{cases} \infty \text{ に発散} & (\ r > 1 \text{ のとき}) \\ 1 & (\ r = 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (\ |r| < 1 \text{ のとき}) \\ \text{発散} & (\ r \leqq -1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

数列の極限

等比数列の極限

[確かめ] $r>1$ の場合。

両辺 r^n をかけると $r^{n+1}>r^n$ だから狭義単調増加。

$a=r-1>0$ とおくと

$$r^n=(1+a)^n=1+na+\cdots>1+na$$

である。ところで $n\to\infty$ とするとき $1+na\to+\infty$ だから $r^n\to+\infty$.

$0<r<1$ の場合。

両辺 r^n をかけると $r^{n+1}<r^n$ だから狭義単調減少。

$b=r^{-1}$ とおくと $b>1$ であり $b^n\to+\infty$.

$$r^n=\left(\frac{1}{b}\right)^n=\frac{1}{b^n}\to\frac{1}{+\infty}=+0$$

関数の極限

関数の極限の定義

関数の極限の定義

$x \to a \quad \Leftrightarrow \quad$「$x$ を $x \neq a$ の状態で定数 a に限りなく近づける」こと.

$f(x)$: 関数, α : 定数　のとき

「$x \to a$ のとき $f(x)$ は極限 (値) α に収束する」

$\Leftrightarrow$「$x \to a$ のとき $f(x)$ は限りなく α に近づく」

記号 : $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$, または $f(x) \to \alpha$, $(x \to a)$ で表す。

「$x \to a$ のとき $f(x)$ は発散する」 $\Leftrightarrow$「どんな α にも収束しない」

「$x \to a$ のとき $f(x)$ は正の (負の) 無限大に発散する」

$\Leftrightarrow$「$x \to a$ のとき $\pm f(x)$ が限りなく大きくなる」

記号 : $\displaystyle\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, または $f(x) \to \pm\infty$, $(x \to a)$ で表す。

関数の極限

関数の極限の定義

関数の極限の定義

$x \to a \pm 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ 「x を $x > a$ $(x < a)$ の状態で定数 a に限りなく近づける」こと.

$a = 0$ のときは $x \to \pm 0$ と書く

$x \to \pm\infty \quad \Leftrightarrow \quad$ 「$\pm x$ を 限りなく大きくする」こと.

このとき

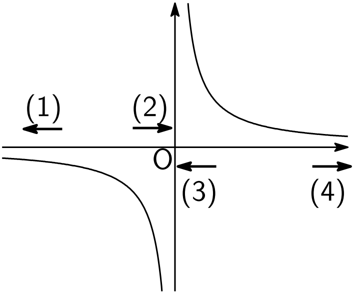
$$\lim_{x \to a \pm 0} f(x), \quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x)$$

も同様に定める。片側極限という。

関数の極限

関数の極限の例

[例 3.6]



(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=-0,$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{1}{x}=-\infty,$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{1}{x}=+\infty,$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=+0$

関数の極限
関数の極限の性質

定理 3.9 関数の極限の性質

$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$, $\lim_{x\to a} g(x) = \beta$ とするとき,

(i) $\lim_{x\to a} kf(x) = k\alpha \qquad$ (k は定数)

(ii) $\lim_{x\to a} (f(x) \pm g(x)) = \alpha \pm \beta$

(iii) $\lim_{x\to a} (f(x)g(x)) = \alpha\beta$

(iv) $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\alpha}{\beta} \qquad$ (ただし, $\beta \neq 0$)

(v) $f(x) \leqq g(x)$, $(n = 1, 2, \cdots)$ $\Rightarrow$ $\alpha \leqq \beta$.

(vi) $f(x) \leqq h(x) \leqq g(x)$, $(n = 1, 2, \cdots)$, $\alpha = \beta$
$\Rightarrow \lim_{x\to a} h(x) = \alpha = \beta$. (はさみうちの原理)

関数の極限

関数の極限の性質

[注意 1.] 定理は $x \to a \pm 0$, $x \to \pm\infty$ のときも正しい。
[注意 2.]

$$\frac{\text{正の数}}{\pm\infty} = \pm 0 \qquad \frac{\text{負の数}}{\pm\infty} = \mp 0$$

$$\frac{\text{正の数}}{\pm 0} = \pm\infty \qquad \frac{\text{負の数}}{\pm 0} = \mp\infty$$

$$\text{正の数} \times (\pm\infty) = \pm\infty \qquad \text{負の数} \times (\pm\infty) = \mp\infty$$

$$(\pm\infty) \times (\pm\infty) = +\infty \qquad (\pm\infty) \times (\mp\infty) = -\infty$$

$$\text{実数} + (\pm\infty) = \pm\infty \qquad (\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$$

と考えると $\alpha, \beta = 0, \infty$ のときも正しい。
[注意 3.] 形式的に

$$\frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad \infty - \infty, \cdots$$

の形になる極限 (不定型の極限) は, 場合により結果が異なるので要注意。