電気のための微分積分　第7回　解答

問題 1. 次の関数 $f(x)$ の増減・凹凸を調べ, 極値および変曲点を求めよ. また, グラフの概形を描け. (青字部分はやらなくてよろしい。)

(1) $f(x) = x^3 - 3x^2$,

[増減を調べる]

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$

だから $f'(x) = 0$ となるのは $x = 0, 2$ のとき。また

$x < 0$ のとき $x < 0$ かつ $x - 2 < 0$ だから $f'(x) = 3x(x-2) > 0$, だからここで狭義単調増加

$0 < x < 2$ のとき $x > 0$ かつ $x - 2 < 0$ だから $f'(x) = 3x(x-2) < 0$, だからここで狭義単調減少

$x > 2$ のとき $x > 0$ かつ $x - 2 > 0$ だから $f'(x) = 3x(x-2) > 0$, だからここで狭義単調増加

[凹凸を調べる]

$f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$

だから $f''(x) = 0$ となるのは $x = 1$ のとき。また

$x < 1$ のとき $f''(x) < 0$ だから上に凸

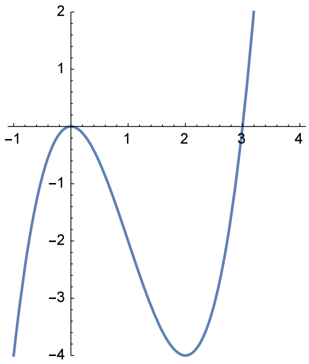
$x > 1$ のとき $f''(x) > 0$ だから下に凸

[増減表を書く] 以上から増減凹凸を調べると

x		0		1		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\searrow$	-4	$\nearrow$

となる. ここで $\nearrow$ は単調増加かつ上に凸, $\searrow$ は単調減少かつ上に凸, $\searrow$ は単調減少かつ下に凸, $\nearrow$ は単調増加かつ下に凸 を表す。

だから $x = 0$ で極大値 0 をとり $x = 2$ で極小値 -4 をとる. 変曲点は $(1, -2)$.



(2) $f(x)=xe^{-x}$, (2) $f(x)=x\,e^{-x}$ とする。

$(e^{ax})'=ae^{ax}$, (a は定数) に注意！

[増減を調べる] 積の微分法により

$$f'(x)=(xe^{-x})'=(x)'e^{-x}+x\,(e^{-x})'=e^{-x}+x\,(-e^{-x})=(1-x)e^{-x}$$

である。だから $f'(x)=0$ となるのは $x=1$ のとき。またすべての x に対して $e^{-x}>0$ だから

$x<1$ のとき $1-x>0$ だから $f'(x)>0$, だからここで狭義単調増加

$1<x$ のとき $1-x<0$ だから $f'(x)<0$, だからここで狭義単調減少

[凹凸を調べる]

$f''(x)=((1-x)e^{-x})'=(1-x)'e^{-x}+(1-x)\,(e^{-x})'=-e^{-x}+(1-x)\,(-e^{-x})=(x-2)e^{-x}$

だから $f''(x)=0$ となるのは $x=2$ のとき。また

$x<2$ のとき $f''(x)<0$ だから上に凸

$x>2$ のとき $f''(x)>0$ だから下に凸

[極限を調べる]

$\lim_{x\to-\infty} e^{-x}=e^{\infty}=+\infty$,

$\lim_{x\to\infty} e^{-x}=e^{-\infty}=+0$,

$\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x}=+0$, $(n=1,2,\cdots)$ 後期に説明します

に注意すると

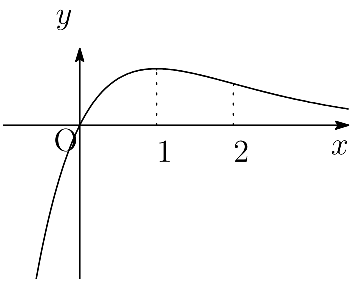
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=x\,e^{-x}=(-\infty)\infty=-\infty$,

$\lim_{x\to\infty} f(x)=+0$.

[増減表を書く] 以上から増減凹凸を調べると

x	$-\infty$		0		1		2		∞
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f''(x)$		$-$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	e^{-1}	↘	$2e^{-2}$	↘	0
					極大		変曲点		

だから $x = 1$ で極大値 e^{-1} をとり, 変曲点は $(2, 2e^{-2})$.



問題.2　次の関数の導関数を計算せよ.

(1) $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$ のとき

$$y' = 3x^2 - 6x + 2$$

(2) $y = e$.　(e はネイピアの数) のとき $y' = 0$. (定数関数だから)

(3) $y = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$ だから $y' = \dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

(4) $y = \dfrac{1}{2x}$ のとき $\dfrac{1}{x} = x^{-1}$ だから

$$y' = \left(\frac{1}{2}x^{-1}\right)' = \frac{1}{2}(-1)x^{-2} = -\frac{1}{2x^2}.$$

また $t = 2x$ とおいて合成関数の微分法を使うと

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right)\frac{d}{dx}(2x) = (-1)t^{-2} \times 2 = \frac{-2}{(2x)^2} = \frac{-1}{2x^2}$$

でもよい。

(5) $y=(x^2+x+1)^5$ のとき $t=x^2+x+1$ とおく.

関数 $y=(x^2+x+1)^5$ は関数 $y=t^5$, $t=x^2+x+1$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dx}(x^2+x+1)=2x+1 \qquad \frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}(t^5)=5\,t^4$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=5\,t^4\times(2x+1)=5(2x+1)(x^2+x+1)^4$$

である.

$\dfrac{dy}{dx}$ は y を x で微分した導関数, $\dfrac{dy}{dt}$ は y を t で微分した導関数を表す. y' ではどちらで微分したのかわからないのでこの記号は避けてください。

(6) $y=\dfrac{1}{x^2+x+1}$ のとき商の微分法により

$$\left(\frac{1}{x^2+x+1}\right)'=\frac{(1)'\times(x^2+x+1)-1\times(x^2+x+1)'}{(x^2+x+1)^2}$$
$$=\frac{0\times(x^2+x+1)-1\times(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}=\frac{-(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}.$$

または $y=\dfrac{1}{t}$, $t=x^2+x+1$ の合成関数とみて合成関数の微分法を使うと

$$\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dx}(x^2+x+1)=2x+1 \qquad \frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{1}{t}=-\frac{1}{t^2}$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{t^2}\times(2x+1)=-\frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$$

としてもよい.

(7) $y=\sqrt{2x-1}$ のとき, $t=2x-1$ とおく. 関数 $y=\sqrt{2x-1}$ は関数 $y=\sqrt{t}$, $t=2x-1$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dx}(2x-1)=2$$

でありまた

$$\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\left(t^{\frac{1}{2}}\right)=\frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

である. だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \times 2 = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

となる.

(8) $y = e^x$ のとき

$$y' = e^x$$

微分しても変わらない関数はこの関数 (の定数倍) だけである。

(9) $y = e^{\cos x}$ のとき $t = \cos x$ とおく.

関数 $y = e^{\cos x}$ は関数 $y = e^t$, $t = \cos x$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx} = (\cos x)' = -\sin x, \qquad \frac{dy}{dt} = e^t$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = e^t \times (-\sin x) = -\sin x \, e^{\cos x}$$

となる.

(10) $y = x^e$ のとき べき関数の微分法により $y = ex^{e-1}$.

(11) $y = \log|2x|$ のとき $t = 2x$ とおく.

関数 $y = \log|2x|$ は関数 $y = \log|t|$, $t = 2x$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(2x) = 2, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\log|t| = \frac{1}{t}$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \times 2 = \frac{1}{x}$$

となる.

$(\log|2x|)' = (\log|x|)'$

であって不思議な気がするかもしれないが,

$\log|2x| = \log 2 + \log|x|$

であるから導関数が一致するのは当然である.

(12) $y = \cos x$ のとき $y' = -\sin x$.

(13) $y=\cos(3x-2)$ のとき $3x-2=t$ とおくと $y=\cos(3x-2)$ は $y=\cos t$ と $t=3x-2$ の合成関数となる.

$t=3x-2$ より $\dfrac{dt}{dx}=3,$

$y=\cos t$ より $\dfrac{dy}{dt}=-\sin t$

である. 合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=3(-\sin t)=-3\sin(3x-2).$$

(14) $y=\sqrt{x^2+4}$ のとき, $t=x^2+4$ とおく.

関数 $y=\sqrt{x^2+4}$ は関数 $y=\sqrt{t}$, $t=x^2+4$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx}=2x$$

であり, また

$$\frac{dy}{dt}=(t^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{t}}$$

である. だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{t}}\times 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}.$$

問題.3 (1) $e^{(1+2i)x}$ の実部と虚部を書け。ただし i は虚数単位。

$$e^{(1+2i)x}=e^x(\cos(2x)+i\sin(2x))=e^x\cos(2x)+ie^x\sin(2x)$$

だから

$$\mathrm{Re}(e^{(1+2i)x})=e^x\cos(2x)$$
$$\mathrm{Im}(e^{(1+2i)x})=e^x\sin(2x)$$

(2) $y=e^{(1+2i)x}$ の導関数を求めよ。

$$y'=(1+2i)\,e^{(1+2i)x}\quad \text{(第 6 回を見よ)}$$

(3) 積の微分法を使って $y=e^x\cos(2x)$ の導関数を求めよ。

$$(e^x\cos(2x))'=(e^x)'\cos(2x)+e^x(\cos(2x))'=e^x\cos(2x)-2e^x\sin(2x).$$

(4) 積の微分法を使って $y=e^x\sin(2x)$ の導関数を求めよ。

$$(e^x \sin(2x))' = (e^x)' \sin(2x) + e^x (\sin(2x))' = e^x \ \sin(2x) + 2\, e^x \ \cos(2x).$$

(5) $y = e^{(1+2i)x}$ の導関数は

($e^x \cos(2x)$ の導関数) $+ i$($e^x \sin(2x)$ の導関数)

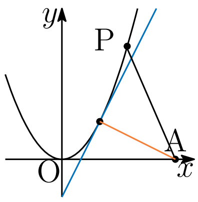
に等しいことを確かめよ。

$$\begin{aligned}(1+2i)\, e^{(1+2i)x} &= (1+2i)\, e^x (\cos(2x) + i \sin(2x)) \\ &= e^x (\cos(2x) - 2\sin(2x)) + i e^x (\sin(2x) + 2\cos(2x))\end{aligned}$$

だから正しい。

問題.4　$y = x^2$ の上の点を P とする。

(1)　P と点 A$(3, 0)$ の距離が最小になるような P を求めよ。



P(x, x^2), A$(3, 0)$ とするとき

$\mathrm{AP}^2 = (x-3)^2 + (x^2 - 0)^2 = x^4 + x^2 - 6x + 9$　($= f(x)$ とおく)

を最小にする x を求めればよい。

$$f'(x) = 4x^3 + 2x - 6 = (x-1)(4x^2 + 4x + 6) = (x-1)((2x+1)^2 + 5)$$

だから $x = 1$ で極小値 $f(1) = 5$ をとる。だから距離が最小になる P は $(1, 1)$.

(2)　(1) で求めた P における接線と AP が直交することを確かめよ。

$(1, 1)$ での接線 の傾きは $f'(1) = 2$.

AP の傾きは $-\dfrac{1}{2}$

だから直交する。