電気のための微分積分　第6回　解答

問題.1　(1)

$$\frac{1-\cos x}{x} = \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)} = \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos x)} = \frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{1+\cos x}$$

だから $x \to 0$ とすると $(\star)$ により

$$\to 1 \times \frac{0}{2} = 0.$$

(2) $(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$ であるが sin の加法定理により

$$\begin{aligned}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} &= \frac{\sin x\cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} \\ &= \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h}\end{aligned}$$

ここで $h \to 0$ とすると $(\star)$, (1) により

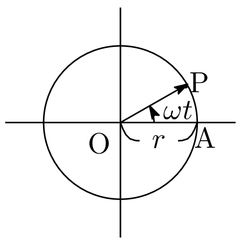
$$\to \cos x$$

だから

$$(\sin x)' = \cos x$$

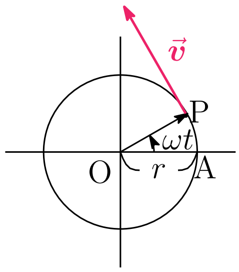
問題.2　点 P は原点中心半径 r の円周上を, 時刻 0 で点 $\mathrm{A}(r, 0)$ を出発し角速度 ω で等速円運動している.

(1) このとき, 時刻 t における P の座標を t を用いて表せ.



角速度が ω だから P は時刻 t には円周上を A から ωt ラジアン回転したところに来る. だから $(r\cos\omega t, r\sin\omega t)$ である.

(2) 時刻 t の時の P の速度ベクトル $\vec{v}(t)$ を求めよ。

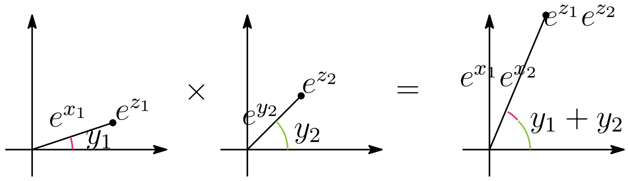


速度ベクトルの成分表示はPの座標をそれぞれ微分すれば得られるから

$$\vec{v}(t) = ((r\cos\omega t)', (r\sin\omega t)') = (-r\omega\sin\omega t, r\omega\cos\omega t)$$

問題.3

(1) 複素数 z_1, z_2 に対して $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$ であることを示せ。



$z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ とおく. 回し伸ばしの原理により

$\arg(e^{z_1}e^{z_2}) = \arg(e^{z_1}) + \arg(e^{z_2}) = y_1 + y_2$

$|e^{z_1}e^{z_2}| = |e^{z_1}||e^{z_2}| = e^{x_1}e^{x_2} = e^{x_1+x_2}$

だから

$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)) = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}$

(2) z を複素数の定数, t を実数の変数とするとき, $\dfrac{d}{dt}e^{zt} = ze^{zt}$ であることを確かめよ。ただし複素数値をとる関数の導関数は i を通常の定数と同じように扱って計算するものとする。

左辺 $= (e^{xt}\cos yt)' + i(e^{xt}\sin yt)'$

$= (e^{xt})'\cos yt + e^{xt}(\cos yt)' + i(e^{xt})'\sin yt + i(e^{xt})(\sin yt)'$

$= xe^{xt}\cos yt - ye^{xt}\sin yt + ix(e^{xt})\sin yt + iye^{xt}\cos yt$

$= e^{xt}(x\cos yt - y\sin yt + xi\sin yt + iy\cos yt)$

$= (x+iy)e^{xt}(\cos yt + i\sin yt) =$ 右辺

問題.4 (1) $y = \sin(3x-2)$ のとき $3x-2 = t$ とおくと $y = \sin(3x-2)$ は $y = \sin t$ と $t = 3x-2$ の合成関数となる.

$t = 3x - 2$ より $\dfrac{dt}{dx} = 3$,

$y = \sin t$ より $\dfrac{dy}{dt} = \cos t$

である．合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 3\cos t = 3\cos(3x-2).$$

(2) $y = \cos(3x-2)$ のとき, $3x - 2 = t$ とおくと $y = \cos(3x-2)$ は $y = \cos t$ と $t = 3x - 2$ の合成関数となる.

$t = 3x - 2$ より $\dfrac{dt}{dx} = 3$,

$y = \cos t$ より $\dfrac{dy}{dt} = -\sin t$

である．合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 3(-\sin t) = -3\sin(3x-2).$$

(3) $y = \sin(x^2+1)$ のとき $x^2 + 1 = t$ とおくと関数 $y = \sin(x^2+1)$ は関数 $y = \sin t$, $t = x^2 + 1$ の合成関数となる.

$t = x^2 + 1$ より $\dfrac{dt}{dx} = 2x$,

$y = \sin t$ より $\dfrac{dy}{dt} = \cos t$

である．合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 2x\cos t = 2x\cos(x^2+1).$$

(4) $y = \cos(x^2+1)$ のとき $x^2 + 1 = t$ とおくと

$$\frac{dt}{dx} = 2x$$

であり, また $y = \cos t$ だから

$$\frac{dy}{dt} = -\sin t$$

である．関数 $y = \cos(x^2+1)$ は関数 $y = \cos t$, $t = x^2 + 1$ の合成関数であるから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 2x(-\sin t) = -2x\sin(x^2+1).$$

(5) $y=\tan(3x-2)$ のとき, $3x-2=t$ とおくと

$y=\tan t$ だから

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{\cos^2 t}$$

である. あとは (1) と同様に

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=3\frac{1}{\cos^2 t}=\frac{3}{\cos^2(3x-2)}.$$

(6) $y=\cos^3(3x-2)$ のとき,

$3x-2=t$, $\cos(3x-2)=s$ とおくと $y=s^3$, $s=\cos t$ だから $y=\cos^3(3x-2)$ は

$$y=s^3,\ s=\cos t,\quad t=3x-2,$$

の合成関数である.

$$\frac{dy}{ds}=3s^2,\quad \frac{ds}{dt}=-\sin t,\quad \frac{dt}{dx}=3$$

だから合成関数の微分法（3 つ以上の関数の合成の場合にも使える）により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt}\frac{dt}{dx}=3s^2\times(-\sin t)\times 3=-9\sin(3x-2)\cos^2(3x-2).$$

(7) $y=\cos\left((3x-2)^3\right)$ のとき,

$3x-2=t$, $(3x-2)^3=s$ とおくと $y=\cos s$, $s=t^3$ だから $y=\cos\left((3x-2)^3\right)$ は

$$y=\cos s,\ s=t^3,\quad t=3x-2,$$

の合成関数である.

$$\frac{dy}{ds}=-\sin s,\quad \frac{ds}{dt}=3t^2,\quad \frac{dt}{dx}=3$$

だから合成関数の微分法（3 つ以上の関数の合成の場合にも使える）により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{ds}\frac{ds}{dt}\frac{dt}{dx}=-\sin s\times 3t^2\times 3=-9\sin\left((3x-2)^3\right)\ (3x-2)^2.$$

(8) 商の微分法により

$$\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'(1+\cos x)-\sin x(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2}$$

$$=\frac{\cos x(1+\cos x)-\sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}=\frac{\cos x+1}{(1+\cos x)^2}=\frac{1}{\cos x+1}.$$

(9) $y=e^{\sin x}$, $t=\sin x$ とおく.

関数 $y = e^{\sin x}$ は関数 $t = \sin x$, $y = e^t$ の合成関数である.

$\dfrac{dt}{dx} = \cos x$

$\dfrac{dy}{dt} = e^t$

だから合成関数の微分法により

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dt}{dx}\dfrac{dy}{dt} = \cos x \times e^t = e^{\sin x}\cos x$

となる.

(10) $y = \log(\cos x)$, $t = \cos x$ とおく.

関数 $y = \log(\cos x)$ は関数 $t = \cos x$, $y = \log t$ の合成関数である.

$\dfrac{dt}{dx} = -\sin x$

$\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{t}$

だから合成関数の微分法により

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dt}{dx}\dfrac{dy}{dt} = -\sin x \times \dfrac{1}{t} = \dfrac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$

となる.

(11) 積の微分法により

$(e^{2x}\cos 3x)' = (e^{2x})'\cos 3x + e^{2x}(\cos 3x)' = 2\,e^{2x}\ \cos 3x - 3\,e^{2x}\ \sin 3x.$

(12) $y = e^{(2+3i)x}$ のとき, 授業中に説明したとおり

$$\frac{dy}{dx} = (2+3i)e^{(2+3i)x} \cdots (\star)$$

である。

(以下余談) この結果を実部, 虚部に分けてみよう。

$$e^{(2+3i)x} = e^{2x}\cos(3x) + ie^{2x}\sin(3x)$$

だから $(\star)$ は

$$\text{左辺} = (e^{2x}\cos(3x))' + i(e^{2x}\sin(3x))'$$

$$\begin{aligned}\text{右辺} &= (2+3i)e^{2x}(\cos(3x) + i\sin(3x)) \\ &= e^{2x}(2\cos(3x) - 3\sin(3x)) + ie^{2x}(3\cos(3x) + 2\sin(3x))\end{aligned}$$

実部同士を比較すると

$$(e^{2x}\cos(3x))' = e^{2x}(2\cos(3x) - 3\sin(3x))$$

これは (11) と一致する。計算が積の微分法を使わないだけ楽になる。

(13) $y = x\cos x$ のとき積の微分法により

$y' = (x)'\cos x + x(\cos x)' = \cos x + x(-\sin x) = \cos x - x\sin x$

(14) $y = \dfrac{1+\cos x}{1-\sin x}$ のとき, 商の微分法により

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(1+\cos x)'(1-\sin x) - (1+\cos x)(1-\sin x)'}{(1-\sin x)^2} \\ &= \frac{-\sin x(1-\sin x) - (1+\cos x)(-\cos x)}{(1-\sin x)^2} \\ &= \frac{\sin^2 x + \cos^2 x - \sin x + \cos x}{(1-\sin x)^2} = \frac{1-\sin x+\cos x}{(1-\sin x)^2} \end{aligned}$$

(15) $t = \dfrac{x}{a}$ とおく.

関数 $y = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$ は関数 $y = \frac{1}{a}\tan^{-1} t$, $t = \frac{x}{a}$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{a}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{a}\frac{1}{1+t^2}$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{a} \times \frac{1}{a}\frac{1}{1+t^2} = \frac{1}{a^2}\frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a^2+x^2}$$

となる.