電気のための微分積分 第5回　解答

問題 1. (1) $\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$ (t は実数) であることを使って $\lim_{h\to 0}\dfrac{\log(x+h)-\log x}{h}$ を計算せよ.

使う log の性質: $\log A - \log B = \log \frac{A}{B}$, $\log A^k = k\log A$

$$\log(x+h)-\log x = \log\frac{x+h}{x} = \log\left(1+\frac{h}{x}\right)$$

だから,

$$\frac{\log(x+h)-\log x}{h} = \frac{\log\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}{h}$$

分母分子に $\dfrac{x}{h}$ をかけ, $\dfrac{h}{x}=t$ とおくと

$$= \frac{\log\left(1+\dfrac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}}{x} = \frac{\log(1+t)^{\frac{1}{t}}}{x}$$

ここで $\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}} = e$ を使うと,

$$\to \frac{\log e}{x} = \frac{1}{x}$$

したがって、$\lim_{h\to 0}\dfrac{\log(x+h)-\log x}{h} = \dfrac{1}{x}$ である。

(2) e^x の導関数. 定義より

$$y = e^x \quad\Longleftrightarrow\quad x = \log y$$

であり, また (1) より

$$\frac{d}{dy}\log y = \frac{1}{y} > 0$$

だから逆関数の微分法により

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}\log y} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = e^x$$

である.

[別解]

$$(e^x)' = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x\,\frac{e^h-1}{h}$$

ここで $e^h - 1 = t$ とおくと $h = \log(1+t)$ だから

$$= \lim_{t \to 0} e^x \frac{1}{\log(1+t)^{\frac{1}{t}}} = e^x \frac{1}{\lim_{t \to 0} \log(1+t)^{\frac{1}{t}}}$$

$$= e^x \frac{1}{\log e} = e^x.$$

問題 2.

(1) $y = e^{3x}$ のとき $t = 3x$ とおく.

関数 $y = e^{3x}$ は関数 $y = e^t$, $t = 3x$ の合成関数である.

$\dfrac{dt}{dx} = 3, \qquad \dfrac{dy}{dt} = e^t$

だから合成関数の微分法により

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = e^t \times 3 = 3\,e^{3x}$

となる.

(2) $y = \log(3x)$ のとき $t = 3x$ とおく.

関数 $y = \log(3x)$ は関数 $y = \log t$, $t = 3x$ の合成関数である.

$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d}{dx}(3x) = 3, \qquad \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{d}{dt}\log t = \dfrac{1}{t}$

だから合成関数の微分法により

$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{dt}\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{t} \times 3 = \dfrac{1}{x}$

となる.

$(\log(3x))' = (\log x)'$

であって不思議な気がするかもしれないが,

$\log(3x) = \log 3 + \log x$

であるから導関数が一致するのは当然である.

(3) 積の微分法と (1) により

$(xe^{3x})' = (x)'e^{3x} + x(e^{3x})' = e^{3x} + x(3e^{3x}) = (1+3x)\,e^{3x}.$

(4) $y = e^{x^2+2x}$ のとき $t = x^2 + 2x$ とおく.

関数 $y = e^{x^2+2x}$ は関数 $y = e^t$, $t = x^2 + 2x$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx} = 2x+2, \qquad \frac{dy}{dt} = e^t$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = e^t \times (2x+2) = (2x+2)\, e^{x^2+2x}$$

となる.

(5) $y = \log|x+\sqrt{x^2+1}|$, $t = x+\sqrt{x^2+1}$ とおく.

関数 $y = \log|x+\sqrt{x^2+1}|$ は関数 $y = \log|t|$, $t = x+\sqrt{x^2+1}$

の合成関数である. No.4 (16) で $a=1$ として,

$$\frac{dt}{dx} = 1 + \frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{t}$$

である. だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \times \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

だから,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

となる.

(6) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ のとき

$$y' = \frac{1}{2}((e^x)' - (e^{-x})') = \frac{1}{2}(e^x - (-e^{-x})) = \cosh x$$

(7) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ のとき

$$y' = \frac{1}{2}((e^x)' + (e^{-x})') = \frac{1}{2}(e^x + (-e^{-x})) = \sinh x$$

(8) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ のとき商の微分法により

$$\left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)' = \frac{(e^x - e^{-x})'(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x + e^{-x})'}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$= \frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$= \frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}. = \frac{1}{(\cosh x)^2}.$$

(9) $y = \dfrac{e^x}{1+e^x}$ のとき, 商の微分法により

$$y' = \frac{(e^x)'(1+e^x)-(e^x)(1+e^x)'}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x(1+e^x)-(e^x)^2}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

(10) $y = \dfrac{x+2}{(x+1)(x-1)}$ とおき対数微分法を使う.

$\log y = \log(x+2) - \log(x+1) - \log(x-1)$

だから

$$(\log y)' = (\log(x+2))' - (\log(x+1))' - (\log(x-1))'$$
$$= \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = -\frac{x^2+4x+1}{(x+2)(x+1)(x-1)}.$$

一方 $(\log y)' = \dfrac{y'}{y}$ だから

$$y' = (\log y)'y = -\frac{x^2+4x+1}{(x+1)^2(x-1)^2}.$$

(11) $y = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ とおき対数微分法を使う.

$\log y = \dfrac{1}{2}(\log(x+1) - \log(x-1))$

だから

$$(\log y)' = -\frac{1}{(x+1)(x-1)}$$

一方 $(\log y)' = \dfrac{y'}{y}$ だから

$$y' = (\log y)'y = -\frac{1}{(x+1)^{\frac{1}{2}}(x-1)^{\frac{3}{2}}}.$$