電気のための微分積分 第4回　解答

問題 1. (1) $y=2x+1,\ z=\sqrt{y}$ の合成関数は $z=\sqrt{2x+1}$ である。y に $2x+1$ を代入すればよい。

(2) $y=2x+1,\ z=\dfrac{1}{y}$ の合成関数は $z=\dfrac{1}{2x+1}$ である。

(3) $y=\dfrac{1}{x},\ z=2y+1$ の合成関数は $z=\dfrac{2}{x}+1$ である。(2) と比較せよ。

(4) $y=\sqrt{x},\ z=2y+1$ の合成関数は $z=2\sqrt{x}+1$ である。(1) と比較せよ.

問題 2. (1) 関数 $y=(2x+1)^4$ は, $2x+1=t$ とおくと x の関数 $t=2x+1$, t の関数 $y=t^4$ の合成関数である。

(2) 関数 $y=\sqrt{x^2+1}$ は, $x^2+1=t$ とおくと x の関数 $t=x^2+1$, t の関数 $y=\sqrt{t}$ の合成関数である。

問題 3. 次の関数の導関数を計算せよ.

(1) $y=(2x-1)^{10}$ のとき $t=2x-1$ とおく.

関数 $y=(2x-1)^{10}$ は関数 $y=t^{10}$, $t=2x-1$ の合成関数である.

$$\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}(t^{10})=10\,t^9 \qquad \frac{dt}{dx}=\frac{d}{dx}(2x-1)=2$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=10\,t^9\times 2=20(2x-1)^9$$

である.

(2) $y=\dfrac{1}{2x-1}$ のとき, $t=2x-1$ とおく. $y=\dfrac{1}{2x-1}$ は $y=\dfrac{1}{t}$, $t=2x-1$ の合成関数となる.

$$\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{t}\right)=-\frac{1}{t^2} \qquad \frac{dt}{dx}=\frac{d}{dx}(2x-1)=2$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=-\frac{1}{t^2}\times 2=-\frac{2}{(2x-1)^2}$$

である.

または 商の微分法により

$$\left(\frac{1}{2x-1}\right)' = \frac{(1)' \times (2x-1) - 1 \times (2x-1)'}{(2x-1)^2}$$
$$= \frac{0 \times (2x-1) - 1 \times 2}{(2x-1)^2} = \frac{-2}{(2x-1)^2}.$$

(3) $y = \sqrt{2x-1}$ のとき, $t = 2x-1$ とおく. 関数 $y = \sqrt{2x-1}$ は関数 $y = \sqrt{t}$, $t = 2x-1$ の合成関数である.

$\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{d}{dx}(2x-1) = 2$

でありまた

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(t^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}t^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

である. だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \times 2 = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$$

となる.

(4) $y = x^3 + 2x^2 + 1$ のとき,

$$y' = (x^3 + 2x^2 + 1)' = (x^3)' + 2(x^2)' + (1)' = 3x^2 + 4x.$$

(5) $y = (x^3 + 2x^2 + 1)^8$ のとき $t = x^3 + 2x^2 + 1$ とおく.

関数 $y = (x^3 + 2x^2 + 1)^8$ は関数 $y = t^8$, $t = x^3 + 2x^2 + 1$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3 + 2x^2 + 1) = 3x^2 + 4x \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(t^8) = 8\,t^7$$

だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 8\,t^7 \times (3x^2 + 4x) = 8(3x^2 + 4x)(x^3 + 2x^2 + 1)^7$$

である.

(6) $y = \dfrac{1}{x}$ のとき

$$y' = \frac{-1}{x^2}$$

(7) $y = \dfrac{1}{x^3 + 2x^2 + 1}$ のとき, $t = x^3 + 2x^2 + 1$ とおく.

関数 $y=\dfrac{1}{x^3+2x^2+1}$ は関数 $y=\dfrac{1}{t}$, $t=x^3+2x^2+1$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dx}\left(x^3+2x^2+1\right)=3x^2+4x \qquad \frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\left(t^{-1}\right)=-t^{-2}$$

である. だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=(-t^{-2})\times(3x^2+4x)=\frac{-(3x^2+4x)}{(x^3+2x^2+1)^2}$$

である.

または 商の微分法により

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x^3+2x^2+1}\right)'&=\frac{(1)'\times(x^3+2x^2+1)-1\times(x^3+2x^2+1)'}{(x^3+2x^2+1)^2}\\&=\frac{0\times(x^3+2x^2+1)-1\times(3x^2+4x)}{(x^3+2x^2+1)^2}=\frac{-(3x^2+4x)}{(x^3+2x^2+1)^2}.\end{aligned}$$

(8) $y=\dfrac{1}{(x^3+2x^2+1)^8}$ のとき $t=x^3+2x^2+1$ とおく.

関数 $y=\dfrac{1}{(x^3+2x^2+1)^8}$ は関数 $y=\dfrac{1}{t^8}$, $t=x^3+2x^2+1$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dx}\left(x^3+2x^2+1\right)=3x^2+4x \qquad \frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}\left(t^{-8}\right)=-8t^{-9}$$

である. だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=(-8t^{-9})\times(3x^2+4x)=\frac{-8(3x^2+4x)}{(x^3+2x^2+1)^9}$$

である.

(9) $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ だからべき関数の微分法により

$$y'=\left(\sqrt{x}\right)'=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

(10) $y=\sqrt{x^3+2x^2+1}$ のとき, $t=x^3+2x^2+1$ とおく. 関数 $y=\sqrt{x^3+2x^2+1}$ は関数 $y=\sqrt{t}$, $t=x^3+2x^2+1$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dx}\left(x^3+2x^2+1\right)=3x^2+4x$$

でありまた (9) により

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2\sqrt{t}}$$

である. だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \times (3x^2 + 4x) = \frac{3x^2 + 4x}{2\sqrt{x^3 + 2x^2 + 1}}$$

となる.

(11) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} = x^{-\frac{1}{2}}$ だからべき関数の微分法により

$$y' = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)' = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}}.$$

(12) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^3 + 2x^2 + 1}}$ のとき, $t = x^3 + 2x^2 + 1$ とおくと, 関数 $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^3 + 2x^2 + 1}}$ は関数 $y = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, $t = x^3 + 2x^2 + 1$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx}\left(x^3 + 2x^2 + 1\right) = 3x^2 + 4x$$

であり, また (11) より

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-1}{2\,t^{\frac{3}{2}}}$$

である. だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{-1}{2\,t^{\frac{3}{2}}} \times (3x^2 + 4x) = \frac{-(3x^2 + 4x)}{2(x^3 + 2x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}$$

となる.

(13) $y = \dfrac{x + 1}{x^2 + 1}$ のとき商の微分法により

$$\left(\frac{x + 1}{x^2 + 1}\right)' = \frac{(x + 1)'(x^2 + 1) - (x + 1)(x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(x^2 + 1) - (x + 1)(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}.$$

(14) $\left(\sqrt{x}\,(x^2 - \dfrac{1}{x})\right)' = \left(x^{\frac{5}{2}} - x^{-\frac{1}{2}}\right)' = \dfrac{5}{2}\,x^{\frac{3}{2}} + \dfrac{1}{2}\,x^{-\frac{3}{2}}.$

(15) 商の微分法により

$$\left(\frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 3}\right)' = \frac{(\sqrt{x} - 3)'(\sqrt{x} + 3) - (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)'}{(\sqrt{x} + 3)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{x}+3) - (\sqrt{x}-3)\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{x}+3)^2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{x}+3)^2}$$

$$= \frac{3x^{-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{x}+3)^2} = \frac{3}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)^2}.$$

(16) $y = \sqrt{x^2+a^2}$ のとき, $t = x^2 + a^2$ とおく.

関数 $y = \sqrt{x^2+a^2}$ は関数 $y = \sqrt{t}$, $t = x^2 + a^2$ の合成関数である.

$$\frac{dt}{dx} = 2x$$

であり, また (9) より

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$$

である. だから合成関数の微分法により

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{t}} \times 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$