電気のための微分積分 第3回　解答

問題 1. (1) 関数 $f(x)$ の, a における微分係数 $f'(a)$ を定義する式を書け.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

a は定数であることに注意。

(2) 関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を定義する式を書け.

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

x は変数であることに注意。

(3) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ とする. 表の空欄に適する数を記入せよ.

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	0	-1	定義できない	3	2	$\frac{3}{2}$

(4) 定義に従ってこの関数の 2 における微分係数 $f'(2)$ を計算せよ.

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{(2+h)}{(2+h)-1} - \frac{2}{2-1}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{2+h}{1+h} - 2\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\frac{-h}{1+h}$$

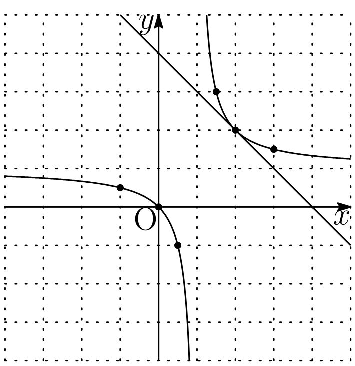
$h \neq 0$ としてよいから h で約分して

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{1+h} = -1$$

(5) (3) の関数のグラフの, x 座標が 2 である点における接線の方程式を求めよ.

$f(2) = 2$ だから接点は $(2, 2)$ である。傾きは $f'(2) = -1$ である。したがって接線の方程式は $y - 2 = (-1)(x-2)$, 整理して $y = -x + 4$

(6) (3) の関数のグラフと, (5) で求めた接線を書け.



2　定義にしたがって次の関数の導関数を求めよ.

(1) $y=2$

$f(x)=2$ とおく.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2-2}{h}=\lim_{h\to 0}0=0.$$

(2) $y=x$

$f(x)=x$ とおく.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}$$

$h\neq 0$ より, h で約分できるので

$$=\lim_{h\to 0}1=1.$$

(3) $y=x^2$

$f(x)=x^2$ とおくと $f(x+h)=(x+h)^2$ だから

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}$$

$h\neq 0$ より, h で約分できるので

$$=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x.$$

(4) $y=x^n$, $(n=1,2,\cdots)$

$f(x)=x^n$ とおくと,

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

二項定理により

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x^n+nx^{n-1}h+{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}h^2+\cdots+h^n)-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{nx^{n-1}h+{}_n\mathrm{C}_2x^{n-2}h^2+\cdots+h^n}{h}$$

$h\neq 0$ より, h で約分することができるので

$$=\lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1}+\boxed{h\text{ について 1 次以上の項}}\right)$$

$$=nx^{n-1}.$$

(5) $y=\sqrt{x}$

$f(x)=\sqrt{x}$ とおくと $f(x+h)=\sqrt{x+h}$ だから

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$

$h\neq 0$ より, h で約分することができるので

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

(6) $y=\dfrac{1}{x}$ のとき, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ とおくと

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ここで $f(x+h)=\dfrac{1}{x+h}$, $f(x)=\dfrac{1}{x}$ だから

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{-h}{x(x+h)}=\frac{-1}{x^2}$$

3 次の関数の導関数を計算せよ。

(1) $y=2x-3x^2$

$y'=(2x-3x^2)'=2(x)'-3(x^2)'=2-6x$

(2) $y=x^3-2x^2+5x+6$

$y'=(x^3-2x^2+5x+6)'=(x^3)'-2(x^2)'+5(x)'+(6)'=3x^2-4x+5$

(3) $y=3\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

$$y'=\left(3\sqrt{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)'=3(\sqrt{x})'-2\left(\tfrac{1}{\sqrt{x}}\right)'=\frac{3}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

(4) $y = x^2 + x - 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$

$y' = \left(x^2 + x - 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)' = (x^2)' + (x)' - (1)' - \left(\frac{1}{x}\right)' - \left(\frac{1}{x^2}\right)'$

$= 2x + 1 + \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3}$

(5) $y = \frac{1}{\sqrt{x^3}} = x^{-\frac{3}{2}}$

$y' = -\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}$

(6) $y = \frac{\sqrt{x} - x}{\sqrt{x^3}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}} - \frac{x}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = x^{-1} - x^{-\frac{1}{2}}$

$y' = -x^{-2} + \frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$

(7) $y = \frac{x}{x-1}$

$y' = \frac{(x)'(x-1) - x(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}$

4 (追加) $f(x) = \sqrt{x}$ とする．この関数のグラフの $x = 1$ である点における接線の方程式を求め、グラフを書け．

2(5) により $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, したがって $f'(1) = \frac{1}{2}$. だから接線の傾きは $\frac{1}{2}$. 次に $f(1) = 1$ だからグラフ上の $x =$ である点は $(1, 1)$. したがって接線は傾き $\frac{1}{2}$ で $(1, 1)$ を通る直線である。方程式は $y - 1 = \frac{1}{2}(x - 1)$ 整理して $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.