電気のための微分積分A 解説

II.(1)

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

できまる関数 $f'(x)$ を，$f(x)$ の導関数という。

(2) (1)より

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

代入

ここで $f(\boxed{x})=3\boxed{x}^2$ だから $f(\boxed{x+h})=3\boxed{(x+h)}^2$ であり

$$=\lim_{h\to 0}\frac{3(x+h)^2-3x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2+6xh+3h^2-3x^2}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{6xh+3h^2}{h}$$

$h\neq 0$ としてよいから h で約分ができて

$$=\lim_{h\to 0}(6x+3h)=6x \,/\!/$$

2. (1) $y = x^3 - 2x^2 + 3$ のとき、

$y' = 3x^2 - 4x$ //

($y = x^3 - 2x^2 - 3x = 3x^2 - 4x$ は不可).

この＝は正しくない.

(2) $y = (3x+2)^5$ のとき、 $3x+2 = t$ とおくと、

$y = t^5$, $t = 3x+2$ だから合成関数の微分法により

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}t^5 \cdot \frac{d}{dx}(3x+2) = 5t^4 \times 3 = \underline{15(3x+2)^4}$ //

($y = (3x+2)^5 = t^5 = 5t^4 = 5t^4 \times 3 = 15(3x+2)^4$

は不可. 正しくない。)

(3) $y = \sqrt{3x+2}$ のとき、 $3x+2 = t$ とおくと、

$y = \sqrt{t} = t^{\frac{1}{2}}$, $t = 3x+2$ だから合成関数の微分法により

$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dt}\left(t^{\frac{1}{2}}\right)\frac{d}{dt}(3x+2) = \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} \times 3 = \underline{\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{3x+2}}}$ //

(4) $y = xe^{3x+2}$ のとき。

(2),(3) と同様にして $(e^{3x+2})' = 3e^{3x+2}$.

積の微分法により

$y' = (x)'e^{3x+2} + x(e^{3x+2})' = 1e^{3x+2} + 3xe^{3x+2}$

$= \underline{(1+3x)e^{3x+2}}$ //

($\frac{d}{dt}(e^t) = te^t$ は誤り. $\frac{d}{dt}e^t = e^t$ が正しい)

(5) $y = e^{3x}\sin(2x)$ のとき.

$2x = t$ とおくと $\sin(2x) = \sin t$ だから 合成関数の微分法により

$$\left(\sin(2x)\right)' = \frac{d}{dt}(\sin t) \times \frac{d}{dt}(2x) = \cos t \times 2 = 2\cos(2x).$$

積の微分法により.

$$y' = \left(e^{3x}\right)'\sin(2x) + e^{3x}\left(\sin(2x)\right)'$$
$$= 3e^{3x}\sin(2x) + e^{3x}\left(2\cos(2x)\right)$$
$$= e^{3x}\left(3\sin(2x) + 2\cos(2x)\right)$$

(6) $y = e^{(3+2i)x}$ のとき。 $y' = (3+2i)e^{(3+2i)x}$

極めて大事な事実である。

複素指数関数の定義

$$e^{3x+2ix} = e^{3x}\left(\cos 2x + i\sin 2x\right)$$

から出発して

$$y' = e^{3x}\left(3\cos 2x - 2\sin 2x\right) + i\left(2\sin 2x + 3\cos 3x\right)$$

としても同じことである。

(7) $y=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$ のとき 商の微分法により

$$y'=\frac{(\cos x)'(1+\sin x)-\cos x(1+\sin x)'}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{-\sin x(1+\sin x)-\cos x(\cos x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{-\sin x-\sin^2 x-\cos^2 x}{(1+\sin x)^2}$$

$$=\frac{-\sin x-1}{(1+\sin x)^2}=\underline{\frac{-1}{1+\sin x}}\ //$$

(9) $y=\log\cos x$ のとき、 $\cos x=t$ とおくと $y=\log t$ になる。

合成関数の微分法により

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\times\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}\log t\times\frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$=\frac{1}{t}\times(-\sin x)=\frac{-\sin x}{\cos x}=\underline{-\tan x}\ //$$

(8) $y=\dfrac{x-1}{x+1}$ のとき 商の微分法により

$$y'=\frac{(x-1)'(x+1)-(x-1)(x+1)'}{(x+1)^2}=\frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}$$

$$=\underline{\frac{2}{(x+1)^2}}\ //$$

(10) $y=\sqrt{x^2+4}$ のとき、$x^2+4=t$ とおくと、$y=\sqrt{t}=t^{\frac{1}{2}}$

だから合成関数の微分法により

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}t^{\frac{1}{2}}\frac{d}{dx}(x^2+4)$$

$$=\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\times 2x=\frac{2x}{2\sqrt{t}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$$ //

(11) $y=\dfrac{1}{1+e^x}$ のとき、$1+e^x=t$ とおくと $y=\dfrac{1}{t}=t^{-1}$

だから合成関数の微分法により

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\times\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}(t^{-1})\frac{d}{dx}(1+e^x)=\frac{-1}{t^2}\times e^x$$

$$=\frac{-e^x}{(1+e^x)^2}.$$

(商の微分法を使うときは $(1)'=0$ に注意)

(12) $y=(x+1)^5(x-1)^4$ のとき

$\log y=5\log(x+1)+4\log(x-1)$ だから

$$(\log y)'=\frac{5}{x+1}+\frac{4}{x-1}=\frac{9x-1}{(x+1)(x-1)}$$

一方 $(\log y)'=\dfrac{y'}{y}$ だから

$$y'=y(\log y)'=\frac{9x-1}{(x+1)(x-1)}\times(x+1)^5(x-1)^4.$$

$$=(9x-1)(x+1)^4(x-1)^3$$ //

(積の微分法でもできる。)

3. (1) $f'(x) = -3x^2 + 12x - 9$

(2) $f'(x) = -3(x-1)(x-3)$ だから

$x = 1, 3$ で $f'(x) = 0$.

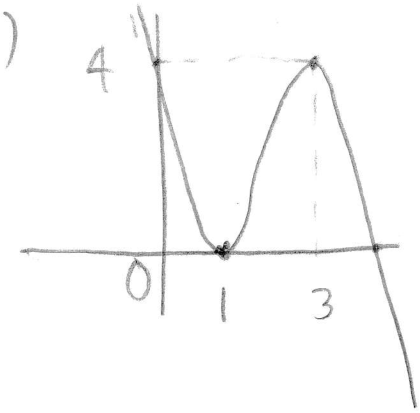
$\left.\begin{matrix} x < 1 \\ x > 3 \end{matrix}\right\}$ で $f'(x) < 0$,　$1 < x < 3$ で $f'(x) > 0$,

$f(1) = 0$,　$f(3) = 4$.

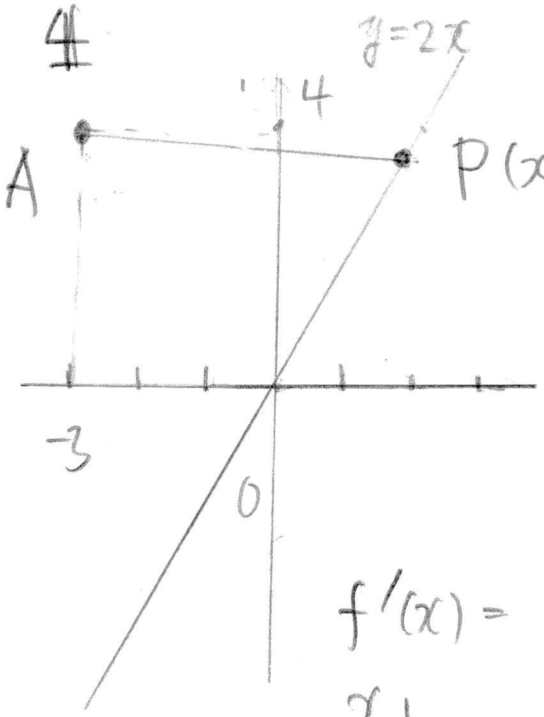
まとめて

x		1		3	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	0	↗	4	↘

(3)



4



(1) Pの座標は

$(x, 2x)$ とかける。

$$AP^2 = (x-(-3))^2 + (2x-4)^2$$

$$= 5(x^2-2x+5)$$

これを $f(x)$ とおく。

$f'(x) = 10(x-1)$ だから増減は

x		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	20	$\nearrow$

だから $x=1$ で最小値 $f(1)=20$ をとる。

だから距離が最小になるのは <u>Pが(1, 2)</u> のときで、そのときのキョリは $\sqrt{20} = \underline{2\sqrt{5}}$

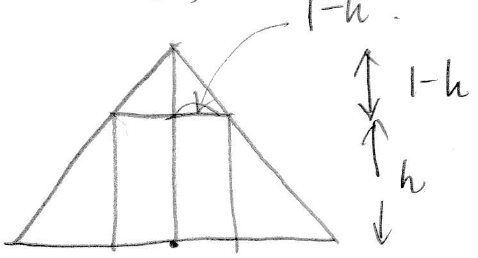
(2) (1)のとき $\begin{cases} \overrightarrow{AP} = (1,2)-(-3,4) = (4,-2) \\ \overrightarrow{OP} = (1,2) \end{cases}$

だから $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{OP} = (4,-2)\cdot(1,2) = 0$

だから APとOPは垂直.

(AP⊥OPから出発して、P(1,2)を導くのは不可.
そうするならば、まず「距離最小 ⇒ AP⊥OP」を
証明しなくてはならない。(できます))

5 (1)



横からみたところ

円柱の半径 $=(1-h)$ だから

$V=\pi(1-h)^2h$ //

(2) $V'=\pi(3h^2-4h+1)=\pi(h-1)(3h-1)$

だから

h		$\frac{1}{3}$		1	
V'	$+$	0	$-$	0	$+$
V	↗		↘	0	↗

で、$h=\frac{1}{3}$ のとき最大値 $\frac{4}{27}\pi$ をとる