FPC（線形代数 B）　演習 [直交行列と直交変換]

1. 直交行列. 行列 A が $A^{-1} = {}^tA$ を満たすとき**直交行列**という。

すなわち，直交行列 A は ${}^tAA = A{}^tA = E$ を満たす行列である。

例 1. 原点中心の角度 θ の回転を表す行列 $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ について，

$|R(\theta)| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ より，$R(\theta)^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -(-\sin\theta) \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

${}^tR(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$　よって，$R(\theta)^{-1} = {}^tR(\theta)$ より，$R(\theta)$ は直交行列である。

例えば，$E = R(0)$ (単位行列)，$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = R\left(\frac{\pi}{2}\right)$ は直交行列

[問 1]　平面上の各点を直線 $y = 2x$ に対して対称な点に写す変換は線形変換であり，それを表す行列は $R = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ である。R が直交行列であることを示せ。

◇ 一般に，直線 $y = ax$ に対する線対称変換は線形変換であり，行列 $R = \frac{1}{a^2+1}\begin{pmatrix} 1-a^2 & 2a \\ 2a & a^2-1 \end{pmatrix}$ で表される。R は，$R^{-1} = R = {}^tR$，$|R| = -1$ を満たすので，直交行列である。

2. 正規直交系.　ベクトル $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n$ が**正規直交系**であるとは，それぞれの大きさが 1 で互いに直交することをいう。すなわち，$\boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_j = \begin{cases} 1 & (i = j \text{ のとき}) \\ 0 & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases}$ が成り立つことをいう。

♣ ベクトル $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ の内積 $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$ は，行列の積 ${}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$ に等しい。

すなわち，$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}$ が成り立つ。

♣ A が直交行列のとき，$A = (\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b})$ と列ベクトルで表すと，

$${}^tAA = \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{a} \\ {}^t\boldsymbol{b} \end{pmatrix}(\boldsymbol{a}\ \ \boldsymbol{b}) = \begin{pmatrix} {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{a} & {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} \\ {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{a} & {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\boldsymbol{a}|^2 & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & |\boldsymbol{b}|^2 \end{pmatrix}$$

${}^tAA = E$ より，$|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}| = 1$，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$　　ゆえに，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ は正規直交系である。

♣ 一般に，n 次正方行列が直交行列である必要十分条件は，n 個の列ベクトルが正規直交系であることである。

例 2. 回転行列 $R(\theta)$ の列ベクトルは $\boldsymbol{a}_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{a}_2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$ である。

$|\boldsymbol{a}_1| = |\boldsymbol{a}_2| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$,　$\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 = (\cos\theta)(-\sin\theta) + (\sin\theta)(\cos\theta) = 0$

よって，$\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ は正規直交系である。

[問 2]　$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a & b \end{pmatrix}$ が直交行列であるとき，次の box を埋めよ。

列ベクトルを $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ とすると，正規直交系である。

$|\boldsymbol{a}_1| = 1$ より $\frac{1}{\boxed{}} + a^2 = \boxed{}$,　$|\boldsymbol{a}_2| = 1$ より $\frac{1}{\boxed{}} + \boxed{}^2 = 1$

$\therefore\ a = \pm\frac{1}{\boxed{}}$，$b = \pm\frac{1}{\boxed{}}$.　また，$\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 = \boxed{}$ より，$\frac{1}{\boxed{}} + ab = \boxed{}$

$\therefore\ ab = -\frac{1}{\boxed{}}$.　以上より，$(a, b) = \pm\left(\frac{1}{\boxed{}}, -\frac{1}{\boxed{}}\right)$

[問 3] 直交行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ a & b & c \end{pmatrix}$ の a, b, c の値を求めよ。

[問 4] 直交行列 A について，次の box を埋めよ。

${}^tA = A^{-1}$ より，${}^t({}^tA) = \boxed{} = (A^{-1})^{-1} = \left(\boxed{} \right)^{-1}$

よって，${}^tA$ も $\boxed{}$ (単語) で列ベクトルは正規直交系である。

ゆえに，A の**行ベクトルも正規直交系である。**

3. 直交変換 直交行列によって表される線形変換を**直交変換**という。

♣ 直交変換 f を表す直交行列を A とすると，${}^tAA = E$ より，

$$f(\boldsymbol{x}) \cdot f(\boldsymbol{y}) = {}^t(A\boldsymbol{x})(A\boldsymbol{x}) = {}^t\boldsymbol{x}{}^tAA\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}E\boldsymbol{y} = {}^t\boldsymbol{x}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$$

よって，**直交変換は内積を変えない変換**である。

[問 5] 直交変換は**2 点間の長さを変えない** $|f(\boldsymbol{x}_1) - f(\boldsymbol{x}_2)| = |\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|$ が成り立つことを示せ。

[問 6] box を埋めよ：直交変換 f で，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ のなす角を θ_1，$f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})$ のなす角を θ_2 とすると，

$$\cos\theta_1 = \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boxed{}}{|\boxed{}||\boldsymbol{y}|} = \frac{f(\boxed{}) \cdot f(\boldsymbol{y})}{|f(\boldsymbol{x})||\boxed{}|} = \cos\theta_2$$

よって，$\theta_1 = \theta_2$． ゆえに，**直交変換はベクトルのなす角を変えない。**

♣ 問 5, 6 から，直交変換は 2 点間の長さやなす角度を変えないので，図形を**合同な**図形に写す。
そのように，各図形を合同な図形に写す変換を**合同変換**という。次が成り立つ。

命題： (1) 原点を原点に写す合同変換は直交変換である。

(2) 平面上の直交変換は，

(i) 原点中心の回転； (ii) 原点を通る直線に対する線対称変換

の 2 種類に分類される。

(3) 空間の直交変換は，

(i) 原点を通る直線を軸とする**回転**；
(ii) 原点を通る平面に対する面対称移動 (**鏡映**)；
(iii) (i) と (ii) の合成変換（**回転鏡映**)

の 3 種類に分類される。

[問 7] box を埋めよ：空間で，z 軸中心の $180°$ 回転 f と xy 平面に対する鏡映 g は

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \\ z \end{pmatrix}, \quad g\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \boxed{} \end{pmatrix}$$ より，

回転鏡映 $(g \circ f)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix}$ は原点中心の**点対称移動**である