線形変換

教科書第 4 章 §1

FPC クラス

線形代数 B

線形変換

- 平面上の各点 $\mathrm{P}(x, y)$ に点 $\mathrm{P}'(x', y')$ を定める対応を平面上の変換といい，$f : (x, y) \to (x', y')$ または $\mathrm{P}' = f(\mathrm{P})$ と表す。

  P' を変換 f による P の像という。
- 変換 f は，x', y' が定数項のない x, y の 1 次式で表されるとき線形変換という。

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \quad (a, b, c, d \text{ は定数})$$

[問 1] 1 次式 $\begin{cases} x' = 2x - 5y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$ で表される線形変換 f について，

点 $\mathrm{P}(2, -3)$ の像 P' の座標を求めよ。

解： $x' = 2 \cdot 2 - 5(-3) = 19, \quad y' = 3 \cdot 2 + 4(-3) = -6$

よって，点 P の像は点 $\mathrm{P}'(19, -6)$

♣ 線形変換 f が 1 次式 $\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$ で表されるとき，

行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を f を表す行列 (または，表現行列) という。

そして，線形変換 f を行列 A の表す線形変換という。

◇ 1 次式は，行列の積を用いて，$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と表される。

[問 2] 1 次式 $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = 5x - 4y \end{cases}$ で表される線形変換を f とするとき，

(1) f を表す行列は $A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{3} \\ \boxed{5} & \boxed{-4} \end{pmatrix}$

(2) 点 $\mathrm{P}(-2, 3)$ の像 P' の座標 (x', y') を A を用いて求めると，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{3} \\ \boxed{5} & \boxed{-4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{-2} \\ \boxed{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{5} \\ \boxed{-22} \end{pmatrix}$$

♣ 線形変換 f は，ベクトル $\mathbf{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ をベクトル

$\mathbf{p}' = f(\mathbf{p}) = \overrightarrow{\mathrm{OP}'} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ に対応させる変換とも考えられ，

$\mathbf{p}$，$f(\mathbf{p})$ を列ベクトルとして，行列で $f(\mathbf{p}) = A\mathbf{p}$ と表せる。

♣ さらに，行列の式 $(f(\mathbf{p})\ f(\mathbf{q})) = A\,(\mathbf{p}\ \mathbf{q})$ が成り立つ。

特に，基本ベクトル $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して，

$(\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2) = E$ (単位行列) なので，$A = (f(\mathbf{e}_1)\ f(\mathbf{e}_2))$ となる。

すなわち，行列 A の列ベクトルは，$f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2)$ である。

♣ 行列 $B = (\mathbf{p}\ \mathbf{q})$ が正則のとき，$(f(\mathbf{p})\ f(\mathbf{q})) = A\,(\mathbf{p}\ \mathbf{q})$ から，

$$(*)\quad A = (f(\mathbf{p})\ f(\mathbf{q}))\,(\mathbf{p}\ \mathbf{q})^{-1}$$

よって，線形変換 f を表現する行列 A は，線形独立なベクトル $\mathbf{p}$，$\mathbf{q}$ と像 $f(\mathbf{p})$，$f(\mathbf{q})$ から $(*)$ の形で求められる。

[問 3] $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ とする。

(1) 行列 $B = (\mathbf{p}\ \mathbf{q})$ の逆行列 B^{-1} を求めよ。

解： $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$ より，$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(2) 線形変換 f で $\mathbf{p}$，$\mathbf{q}$ が $f(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$，$f(\mathbf{q}) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ に対応するとき，f を表す行列 A を求めよ。

解： $C = (f(\mathbf{p})\ f(\mathbf{q})) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ とすると，$C = AB$ より，

$$A = CB^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

線形変換の線形性

♣ 線形変換の定義から，次の線形性が成り立つ。

$$f(k\mathbf{p}+l\mathbf{q}) = kf(\mathbf{p})+lf(\mathbf{q})$$ （ただし，k, l は数）

♣ $\mathbf{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\mathbf{q}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のとき，直線 PQ 上の点 X の位置ベクトルは，

$\mathbf{x}=\overrightarrow{\mathrm{OX}}=t\mathbf{p}+(1-t)\mathbf{q}$ (t は実数）と表される。

そのとき，f の線形性から，$f(\mathbf{x})=tf(\mathbf{p})+(1-t)f(\mathbf{q})$ よって，

$f(P)\neq f(Q)$ のとき，直線 PQ は直線 $f(\mathrm{P})f(\mathrm{Q})$ に写される。

[問 4] (1) 線形変換 f で，$f(\mathbf{a})=\begin{pmatrix}2\\-6\end{pmatrix}$，$f(\mathbf{b})=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ のとき，

$$f(4\mathbf{a}+5\mathbf{b})=\begin{pmatrix}\boxed{23}\\\boxed{-4}\end{pmatrix}$$

(2) (1) で，$\mathbf{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ のとき，線形変換 f によって，

直線 OA は直線 $y=\boxed{-3}\,x$ に写される。

例 1.　線形変換 f を表す行列が $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$ のとき，

f による直線 $y = -2x + 1$ の像を求めよう。

< 方法 1>　直線 $y = -2x + 1$ 上の 2 点 $\mathrm{P}(0, 1)$，$\mathrm{Q}(1, -1)$ をとると，

$$f(\mathrm{P}) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix},\quad f(\mathrm{Q}) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

像の直線は $f(\mathrm{P})$，$f(\mathrm{Q})$ を通るので，方程式は

$$y' = \frac{7 - (-2)}{4 - (-1)}(x' - 4) + 7 = \frac{9}{5}(x' - 4) + 7 = \frac{9}{5}x' - \frac{1}{5}$$

(この方程式は，$9x' - 5y' = 1$ とも表せる)

< 方法 2>　直線 $y = -2x + 1$ 上の点 $(x, -2x + 1)$ の像 (x', y') は，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ -2x + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5x + 4 \\ -9x + 7 \end{pmatrix}$$

よって，$x' = -5x + 4$，$y' = -9x + 7$

これから x を消去して，$9x' - 5y' = 1$（当然，同じ結果がでる）

[問 5] 線形変換 f を表す行列が $A=\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 4 & 5\end{pmatrix}$ のとき，

直線 $3x+2y+2=0$ の f による像の方程式を求めよ。

解法 1: 直線 $3x+2y+2=0$ 上の 2 点 $\mathrm{P}(0,-1)$,$\mathrm{Q}(2,-4)$

$$f(\mathrm{P})=\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ -5\end{pmatrix},$$

$$f(\mathrm{Q})=\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\ -12\end{pmatrix}$$

像は $f(\mathrm{P})$，$f(\mathrm{Q})$ を通るの直線なので，方程式は

$$y'=\frac{-5-(-12)}{4-10}(x'-4)-5=-\frac{7}{6}(x'-4)-5=-\frac{7}{6}x'-\frac{2}{6}$$

解法 2： 直線 $3x+2y+2=0$ 上の点 $(2x,-3x-1)$ の像 (x',y') は，

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -4\\ 4 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2x\\ -3x-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6x+4\\ -7x-5\end{pmatrix}$$

よって，$x'=6x+4$，$y'=-7x-5$

これから x を消去して，$7x'+6y'+2=0$ (上と同じ式である)