アルキメデスに倣って円周率を計算する

円周に長さがあるということは直観的に誰でも知っていることであり

$$\frac{\text{円周の長さ}}{\text{円の直径}}$$

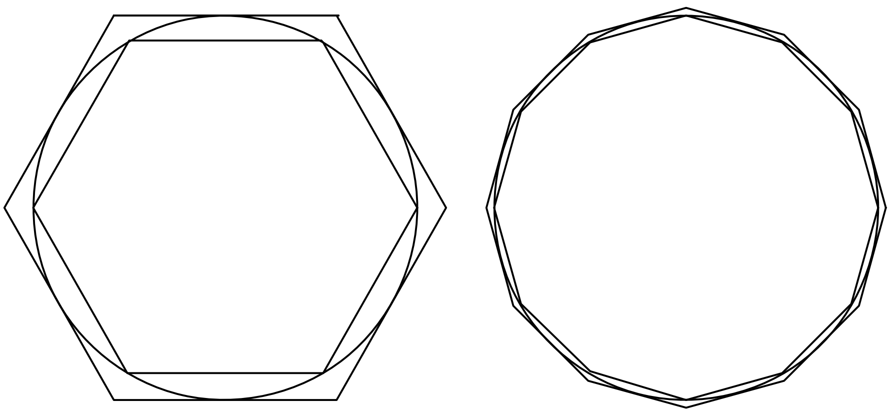
が円の大きさによらない定数であることも四千年前から知られていたようである. この定数を **円周率** とよび 通常 π で表わす. 円周率は円の面積, 球の体積, 球面積に現れるほかにも, これを使わないと高校数 III 以上の微積分ができなくなってしまう. しかし, こんなに大事なものでありながら円周率というのはなかなか厄介な数である. これは有理数でない (つまり $\frac{\text{整数}}{\text{整数}}$ の形に表すことができない) ばかりでなく,

$$a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \cdots\cdots a_1\,x + a_0 = 0, \quad (a_0, \cdots a_n \text{は整数})$$

の形の方程式の解にもならない.

なんとか「円周率は一つの実数で表される」ことを実感したいし, また「望めばいくらでも精密な近似値がわかる」ようにしたい. そこで今回はアルキメデス (B.C. 287 - B.C. 212) の方法で円周率 π の値を計算してみよう. まず直径 1 の円を作る. この円の周の長さが円周率である.

$$L_n = \text{円に外接する正 } n \text{ 角形の周の長さ},$$
$$l_n = \text{円に内接する正 } n \text{ 角形の周の長さ}$$



とおく. ちょっと考えると

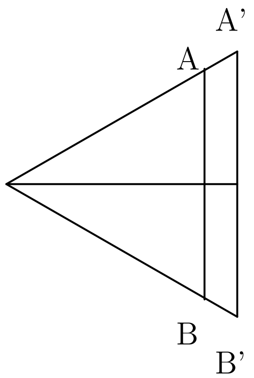
1. $l_n < L_n$, $(n = 1, 2, \cdots)$ であり,
2. n を大きくしていくと L_n は減少し l_n は増加し,
3. n を大きくしていくと $L_n - l_n$ は 0 に限りなく近づく

ことがわかる.

これだけ条件がそろえば L_n も l_n もどちらも同じ値に限りなく近づくことが納得いくだろう. 円周の長さはこの極限と考えられる.

そこで n を大きくしながら L_n, l_n の値を計算してみよう.

一辺に対する中心角の半分を θ とおくと,



$$\begin{cases} L_n = nA'B' = n\tan\theta, \\ l_n = nAB = n\sin\theta, \end{cases} \quad \begin{cases} L_{2n} = 2n\tan\dfrac{\theta}{2}, \\ l_{2n} = 2n\sin\dfrac{\theta}{2}, \end{cases}$$

であるが, 半角の公式を使うと

$$(A) \qquad \begin{aligned} L_{2n} &= \frac{2L_n l_n}{L_n + l_n}, \\ l_{2n} &= \sqrt{L_{2n} l_n}, \end{aligned}$$

であることがわかる. 簡単に確かめよう. tan の二倍角の公式から

$$\tan\theta = \tan 2\frac{\theta}{2} = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2\frac{\theta}{2}}.$$

これを整理して

$$\tan\theta\left(\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}\right) - \tan\theta = 0.$$

これを $\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}$ の二次方程式と見て解くと

$$\left(\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}\right) = \frac{1 + \sqrt{1 + \tan^2\theta}}{\tan\theta} = \frac{1 + \frac{1}{\cos\theta}}{\tan\theta} = \frac{1}{\tan\theta} + \frac{1}{\sin\theta}.$$

ここで両辺を n でわると第 1 式がでる. 第 2 式は各自でやってみてください.

(A) がわかったので後は計算を繰り返していけばいくらでも精密な近似値が得られるはずである.

今回は数学ソフトウェア Mathematica を用いて自動的にやってみよう. まず

$$\mathrm{ext}(i) = L_{2^i\times 6},$$
$$\mathrm{int}(i) = l_{2^i\times 6},$$

とおくと (A) により 漸化式

$$(A)' \qquad \begin{aligned} &\mathrm{ext}(0) = L_6 = 2\sqrt{3}, \\ &\mathrm{int}(0) = l_6 = 3, \\ &\mathrm{ext}(i) = \frac{2\mathrm{ext}(i-1)\mathrm{int}(i-1)}{\mathrm{ext}(i-1)+\mathrm{int}(i-1)}, \quad i = 1, 2, \cdots, \\ &\mathrm{int}(i) = \sqrt{\mathrm{ext}(i)\mathrm{int}(i-1)}, \quad i = 1, 2, \cdots, \end{aligned}$$

が得られる.

次のように入力する.

```
int = 3
ext = 2*Sqrt[3.00000000]
t = Table[{6*2^i, ext = 2*ext*int/(ext + int), int = Sqrt[ext*int]}, {i, 1,
     6}]
TableForm[InputForm[t]]
```

出力は

```
{{12, 3.2153903091734723, 3.1058285412302493},
 {24, 3.159659942097501,  3.1326286132812386},
 {48, 3.1460862151314353, 3.1393502030468676},
 {96, 3.1427145996453687, 3.1410319508905102},
{192, 3.141873049979824,  3.1414524722854624},
{384, 3.141662747056849,  3.141557607911858}}
```

となる.